Nápověda k části domácího úkolu z druhého cvičení

H3 Práce s množinami.

b) Nechť $f : X \to Y$ a nechť $A, B \subseteq Y$. Dokažte, že platí $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$.
Dokáže se velmi podobně jako cvičení G3, a) pro sjednocení A, B.

c) Nechť $f(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [-1, 1]$ a nechť $M = [-1, 1]$, $N = \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$, $P = \{0\}$,
$S = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ \cos(4\pi x) = 1\} \cap (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nalezněte vzory těchto množin při zobrazení f, tj. najděte množiny $f^{-1}(M)$, $f^{-1}(N)$, $f^{-1}(P)$, $f^{-1}(S)$.

Připomeňme, co je to vzor množiny při zobrazení:

Definice *Nechť X, Y jsou množiny, $f : X \to Y$, nechť $A \subseteq Y$. Vzor A při zobrazení f značíme $f^{-1}(A)$ a rozumíme jím množinu*

$$\{x \in X |\ f(x) \in A\}.$$

Co to znamená? Dle definice je $f^{-1}(A)$ množina všech prvků z X, které se zobrazí do A. Uveďme ještě dva příklady pro ilustraci:

Příklad 1 Nechť $X = [0, 3]$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $f(x) = x+1$, $x \in X$. Uvažme postupně množiny $A, B, C, D \subseteq Y$, $A = [2, 3)$, $B = \{1; 3; 4\}$ $C = (-5, 5)$, $D = \{10\}$. Buďto obrázkem, spočtením inverzní funkce nebo od pohledu (jelikož tento příklad je triviální) najdeme postupně vzory těchto množin při zobrazení f:

$f^{-1}(A) = [1, 2)$, $f^{-1}(B) = \{0; 2; 3\}$, $f^{-1}(C) = X$, $f^{-1}(D) = \emptyset$.

Příklad 2 Nechť $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $f(x) = \log(x^2)$, $x \in X$. Nechť $A = [0, 1]$, $B = \{5; 10\}$. Potom pro každé $x \in X$ platí:

$$f(x) = \log(x^2) \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^{f(x)}}.$$

Z toho tedy máme $f^{-1}(A) = [-\sqrt{e}, -1] \cup [1, \sqrt{e}]$ a $f^{-1}(B) = \{-\sqrt{e^{10}}; -\sqrt{e^5}; \sqrt{e^5}; \sqrt{e^{10}}\}$.