2. cvičení z MA II

Matěj Novotný

1.3.2012

Úlohy na cvičení

G1 Spočtěte neurčité integrály za pomoci rozkladu na parciální zlomky.

$$a) \int \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{x^2 - 5x + 6}\, dx \qquad b) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)(x-1)}\, dx \qquad c) \int \frac{5x^3 + 5x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1}\, dx$$

$$d) \int \frac{1}{x^4 + 1}\, dx \qquad e) \int \frac{x^2}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}\, dx$$

G2 Spočtěte neurčité integrály pomocí druhé věty o substituci.

$$a) \int \sqrt{1 - x^2}\, dx \qquad b) \int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

Úlohy na procvičení

S1 Počítejte.

$$a) \int \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + x - 2}\, dx \qquad b) \int \frac{x^{12} - 1}{x^4 - 1}\, dx \qquad c) \int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx \qquad d) \int \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$$

$$e) \int \frac{2x^2 - 3}{(x^2 + 2x + 7)(x - 2)}\, dx \qquad f) \int \frac{1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}\, dx \qquad g) \int \frac{2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3 - x^2 + x}\, dx$$

S2 Počítejte. Rozmyslete si vždy, kterou větu o substituci používáte a ověřte náležitě předpoklady.

$$a) \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx \qquad b) \int \frac{2\cos^2 x + 2\cos x + \sin^2 x}{\sin x}\, dx \qquad c) \int \frac{e^{3x} - 1}{e^x + 1}\, dx \qquad d) \int \frac{e^x + 1}{e^{3x} + 1}\, dx$$

$$e) \int \frac{\sin 2x - \cos^3 x}{\sin x \cos 2x + 3\sin^3 x}\, dx \qquad f) \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}\, dx \qquad g) \int \frac{1}{\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 3}\, dx$$

Úlohy na rozmyšlení

Víme, že pokud je funkce spojitá na otevřeném intervalu, má na něm primitivní funkci. Avšak ne každá funkce mající na takovém intervalu primitivní funkci musí být spojitá, jak shrnují následující dvě úlohy.

N2 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a buď F primitivní funkce k f na (a, b). Dokažte, že pokud není f spojitá na (a, b), pak existuje $y \in (a, b)$, že alespoň jedna z limit

$$\lim_{x \to y^-} f(x), \quad \lim_{x \to y^+} f(x)$$

neexistuje.

N3 Na intervalu $(-1, 1)$ uvažme následující funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že:
a) f není spojitá na $(-1, 1)$,
b) existuje funkce $F : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ primitivní k f na $(-1, 1)$.

Návod: Najděte primitivní funkce zvlášť na intervalu $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ a vhodně je 'slepte'.

N4 Při rozkladu na parciální zlomky se mohou objevit integrály typu

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Utvořte (pomocí metody per partes) vzorec pro výpočet I_n z I_{n-1} pro $n > 1$. Spočtěte I_2 pomocí vhodné substituce (nikoliv pomocí per partes).

Výsledky

Ve výsledcích je vždy $c \in \mathbb{R}$.

S1
a) $x + \log|x-1| + 3\log|x+2| + c$, b) $\frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{5}x^5 + x + c$, c) $\frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$, d) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$, e) $\frac{1}{3}\log|x-2| + \frac{5}{6}\log|x^2+2x+7| + \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}(\frac{x+1}{\sqrt{6}}) + c$, f) $\log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}$, g) $x^2 - 5x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) + \log|x| + c$.

S2
a) $-e^{-x}\operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, b) $\cos x + 2\log(1-\cos x)$, c) $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + 2\log(e^x+1) - x + c$, d) $x - \frac{1}{2}\log(e^{2x} - e^x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}(2e^x - 1)) + c$, e) $\log(\sin^2 x + 1) - \log|\sin x| + 2\operatorname{arctg}\sin x + c$, f) $\frac{1}{4}(\log|\operatorname{tg} x - 1| - \log|\operatorname{tg} x + 1| - 2x) + c$, g) $2\sqrt{x} - 16\sqrt[4]{x} + 54\log|\sqrt[4]{x}+3| - 2\log|\sqrt[4]{x}+1| + c$