

3. cvičení z MA II

Matěj Novotný

8.3.2012

Úlohy na cvičení

G1 Spočtěte neurčité integrály.

$$\begin{aligned} a) \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2\sqrt{x-1}} dx & \quad b) \int \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x-12}} dx & \quad c) \int \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x} dx & \quad d) \int \frac{\sqrt{4x^2+3}}{\sqrt{4x^2+3+2x}} dx \\ e) \int \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^2+4} dx & \quad f) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - 4\cos^2 x + 3} dx \end{aligned}$$

G2 Spočtěte určité integrály.

$$a) \int_0^\pi (\sin x + x) dx \quad b) \int_0^1 \log x dx$$

G3 Spočtěte obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x , je-li f zadána jako

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 1 - x^2 & x > 0. \end{cases}$$

Úlohy na procvičení

S1 Počítejte.

$$\begin{aligned} a) \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx & \quad b) \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{x+1}} \frac{1}{x+1} dx & \quad c) \int \sqrt{x^2+2x+4} dx & \quad d) \int \frac{2}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx \\ e) \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2-7x+3}} dx & \quad f) \int \frac{3\sin^2 x - 1}{5 - \cos^2 x} dx & \quad g) \int \frac{1 + \cos^4 x}{\sin^3 x} dx & \quad h) \int \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} dx \end{aligned}$$

S2 Počítejte.

$$a) \int \frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1+x}} dx \quad b) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx \quad c) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx \quad d) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx$$

Úlohy na rozmyšlení

Víme, že pro každé $a > 0$, je $\int_{-a}^a f = 0$, pokud je f lichá, integrovatelná funkce. Je proto někdy výhodné zkoumat paritu funkcí.

N5 Nechtě je $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ukažte, že platí:

1) f je lichá $\Rightarrow f'$ je sudá.

2) f je sudá $\Rightarrow f'$ je lichá.

N6 Nechtě jsou $f, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liché funkce a $g, g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce sudé. Co lze říci o paritě následujících funkcí? Dokažte.

$$f + f_1, \quad f f_1, \quad f \circ f_1, \quad |f|,$$

$$g + g_1, \quad g g_1, \quad g \circ g_1, \quad |g|,$$

$$f + g, \quad f g, \quad f \circ g, \quad g \circ f.$$

N7 Spočtěte určitý integrál:

$$\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{x^2 \operatorname{tg} 4x - x + 2 \cos^4 x + \sqrt[3]{10} \operatorname{arctg} x + 2 \sin^4 x}{2 - \sin^2 2x} dx$$

Výsledky

Ve výsledcích je vždy $c \in \mathbb{R}$.

S1

a) $\log |\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}| - x + c$, d) $\frac{2}{3} \arcsin(\frac{x-2}{3}) + c$.

S2

a) $-2 \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}) - \log |1 - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}| + \log |1 + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}| + c$, b) $\frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \log(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)^2 - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1})$, c) $2 \sinh 1$, d) 4 .