

6. cvičení z MA II

Matěj Novotný

29.3.2012

Úlohy na cvičení

G1 Lepení po integraci. Spočítejte následující integrály:

$$a) \int \frac{1}{\cos^2 x + 4} dx \quad b) \int_0^{4\pi} \frac{1}{2 + \sin x} dx$$

G2 Jsou následující množiny otevřené, uzavřené, omezené, kompaktní? Pokud je to možné, nakreslete si je a určete jejich hranici a derivaci.

$$a) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}, \quad b) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 1, y^2 \leq 3\},$$

$$c) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq 4, y^2 + \frac{x^2}{4} \geq 1\}, \quad d) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |2x + y| \leq 2\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Z}\},$$

$$e) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2 \leq 1\}, \quad f) \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < z^2, z^2 < 9\},$$

$$g) \{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1, \sum_{i=1}^n ix_i = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Úlohy na rozmyšlení

Na lineárních prostorech (nejen) konečné dimenze se často zavádí takzvaná p -norma. Ta je definována následovně:

Bud' X lineární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem reálných čísel a bud' $x \in X$ libovolný vektor. Bud'te $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ souřadnice x vzhledem k nějaké předem pevně zvolené bazi. Necht' $p \in [1, \infty]$. Definujeme

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

$$\|x\|_p := \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|, \quad p = \infty.$$

N9 Lze dokázat, že pro $0 < p < 1$ rovnost výše nedefinuje normu, pokud je $n > 1$. Vyberte si vhodný vektorový prostor dimenze větší než jedna a ukažte, že pro $p = 1/2$ a pro $p = 2/3$ zobrazení $\|\cdot\|_p$ definované výše není norma.

N10 Vymyslete a ukažte, proč se případ $p = \infty$ definuje právě takto.

N11 Platí, že každá norma na vektorovém prostoru indukuje na tomto prostoru metriku. Pokud je tedy $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, metriku $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ indukovanou normou $\|\cdot\|$ definujeme jako

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Uvažme prostor (\mathbb{R}^2, ρ_p) pro $p = 1$, $p = 2$, $p = 4$, $p = \infty$, kde ρ_p je indukovaná p -normou. Nakreslete (co nejprecizněji) jednotkové koule v těchto prostorech.