7. cvičení z MA II

Matěj Novotný

5.4.2012

Úlohy na cvičení

G1 Rozhodněte, zda lze následující funkce spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$).

$$a)\ f(x,y)=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2},\quad b)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\quad c)\ f(x,y)=\frac{2x+y^2}{|x|+|y|},\quad d)\ f(x,y)=\frac{3xy-y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}},$$

$$e)\ f(x,y)=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2},\quad f)\ f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4},\quad g)\ f(x,y)=\frac{x^6+y^6}{x^4+y^4},\quad h)\ f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$$

G2 Pokud lze (a je potřeba), spojitě funkce dodefinujte. Spočtěte parciální derivace a totální diferenciál ve všech bodech (spojitě dodefinované) funkce, kde existují.

$$a)\ f(x,y)=\sin(xy)+3y^2,\quad b)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\quad c)\ f(x,y)=e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}},\quad d)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Úlohy na procvičení

S1 Rozhodněte, zda lze funkce spojitě dodefinovat. Případně spočítejte parciální derivace a totální diferenciál všude, kde je to možné.

$$a)\ f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad b)\ f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2},\quad c)\ f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad d)\ f(x,y)=\frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$$

Výsledky

S1 v textu značme $f_x(x,y):=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f_{xy}(x,y):=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ a podobně.

a) Nelze dodefinovat, např. pro $x=y$ limita v nule neexistuje. $f_x(x,y)=\frac{-yx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y(x,y)=\frac{x^2+y^2-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

b) Lze dodefinovat 0. Pro $(x,y)\neq(0,0)$ je $f_x(x,y)=\frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y)=\frac{-3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}$ a $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Totální diferenciál v nule neexistuje.

c) Lze dodefinovat 0. Je $f_x(x,y)=\frac{y^3\cos(xy)+yx^2\cos(xy)-x\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y(x,y)$ naprosto symetricky, vše pro $(x,y)\neq(0,0)$. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Totální diferenciál v nule neexistuje.

d) Lze dodefinovat 0. Pro $(x,y)\neq(0,0)$ je $f_x(x,y)=\frac{-y\sin(xy)(x^2+y^2)-2x\cos(xy)+2x}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y)$ symetricky. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, totální diferenciál v nule existuje, je triviální.