8. cvičení z MA II

Matěj Novotný

12.4.2012

Úlohy na cvičení

G1 Pokud lze (a je potřeba), spojitě funkce dodefinujte. Spočtěte parciální derivace a totální diferenciál ve všech bodech (spojitě dodefinované) funkce, kde existují.

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad b)\ f(x,y) = x(\sin y)\log(x^2+y^2), \qquad c)\ f(x,y) = xy\frac{\sin(x-y)}{x^2-y^2},$$

G2 Derivace složené funkce. Spočtěte derivaci (parciální derivace ve všech směrech) funkce $f \circ g$, jsou-li f a g zadány jako

$$a)\ f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xe^y + 2z, \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \quad g(t) = (t^2, e^t, 1).$$

$$b)\ f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \quad f_1(x,y) = xy, \quad f_2(x,y) = x^2+y^2, \quad g_1(\alpha,\beta) = \cos\alpha, \quad g_2(\alpha,\beta) = -\sin(\alpha\beta).$$

G3 Implicitně zadané funkce.
a) Dokažte, že rovnice

$$x^2 + 3y^2 = 4$$

definuje na okolí bodu $(1,1)$ implicitně zadanou funkci $y = y(x)$. Spočtěte $y'(1)$ a $y''(1)$.

b) Dokažte, že rovnice

$$2x^2 + 3yx + 6ze^y - 2\log z = 6$$

zadává na okolí bodu $(0,0,1)$ funkci $z = z(x,y)$. Spočtěte z_x, z_y v bodě $(0,0)$.

Úlohy na rozmyšlení

N12 Ověřte z definice, že existuje totální diferenciál funkce f v bodě $(1,0)$, pro f z úlohy **G1** a).

Příklady

S1 a) Zderivujte funkci $f \circ g$ podle všech proměnných, jsou-li funkce f,g zadány jako

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xyz, \quad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \quad g(s,t) = (s^2+t^2, 0, 2st).$$

b) Zderivujte funkci $f \circ g$ v bodě $t = 1$, pokud jsou f a g rovny

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (\mathrm{arctg}(xy), (x-y)^3), \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, \quad g(t) = (\log t^2, t+2).$$

S2 Vyšetřete, na okolí kterých bodů $\mathbb{R}^2$ zadává následující rovnice implicitně funkci $y = y(x)$. Spočítejte v těchto bodech $y'(x)$, $y''(x)$.

$$x^4 - 2x^2 + y^2 = 0$$

Výsledky

S1 a) $\mathsf{D}(f\circ g)(s,t) = (0,0)$, b) $(f\circ g)'(1) = (6,-12)$.
S2 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -x^4+2x^2+y^2 = 0\} \setminus \{(-\sqrt{2},0),(0,0),(\sqrt{2},0)\}$. Derivace: $y'(x) = \frac{2x^3-2x}{y(x)}$, $y''(x) = \frac{(6x^2-2)y^2(x)-(2x^3-2x)^2}{y^3(x)}$.