Řešení domácí úlohy z 1. cvičení

Matěj Novotný

2.10.2012

Úlohy na doma

H1 Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$a)\ f_n(x) = x^n - x^{2n} \text{ na } [0,1], \qquad b)\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \text{ na } \mathbb{R}, \qquad c)\ f_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \text{ na } \mathbb{R}.$$

Řešení

H1 a) Protože pro každé $x \in [0,1]$ je

$$\lim_{n\to\infty} x^n - x^{2n} \overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 - 0 = 0,$$

platí $f_n \to 0$ na $[0,1]$. Pro vyšetření stejnoměrné konvergence použijeme charakterizaci pomocí limity suprem (viz *Theorem 1* ze cvičení). Zkoumáme:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{2n} - 0|.$$

Vyšetříme lokální extrémy funkce v argumentu. Derivujme:

$$0 = f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} \Rightarrow (x = 0) \vee (x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}).$$

Tedy supremum se bude nabývat v jednom z uvedených bodů nebo na kraji intervalu $[0,1]$.

$$S_n := \sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{2n}| = \max\{|0-0|, |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}|, |1-1|\} = \frac{1}{4}$$

Vidíme, že $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} \neq 0$ a tedy f_n nekonverguje stejnoměrně k nule na $[0,1]$. Vyšetříme lokálně stejnoměrnou konvergenci. Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$, existuje pro každé $1 > \varepsilon > 0$ nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Funkce $f_n,\ n \geq n_0$ jsou na $[0, 1-\varepsilon]$ monotónní, a proto platí

$$s_n := \sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} |x^n - x^{2n}| = \max\{(0-0), (1-\varepsilon)^n - (1-\varepsilon)^{2n}\}$$

a z toho již $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Posloupnost funkcí f_n tedy konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $[0,1)$.

H1 b) Neboť je pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ ze spojitosti druhé odmocniny

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(x^2 + \frac{1}{n^2})} = |x| =: f(x),$$

platí $f_n \to f$ na $\mathbb{R}$. Pomocí suprem vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Funkce $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ jsou sudé. Stačí proto vyšetřit

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - x| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |\frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + x}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1/n^2}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Platí tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$. Protože jsou funkce f_n sudé, platí $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

H1 c) Zřejmě

$$0 \leq |\frac{\cos nx}{n}| \leq \frac{1}{n},\ x \in \mathbb{R},$$

a tudíž i $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{n} = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Navíc

$$s_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{\cos nx}{n} - 0| \leq \frac{1}{n}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, čímž dostáváme $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.