Řešení domácí úlohy z 10. cvičení

Matěj Novotný

4.12.2012

Úlohy na doma

H1 Ukažte, v kterých bodech jsou funkce komplexně diferencovatelné.

$$a)\ f(z) = z^3 + 4z^2 - 5, \qquad b)\ f(z) = |z|, \qquad c)\ f(z) = \overline{z}.$$

H2 Spočítejte rezidua v pólech.

$$a)\ f(z) = \frac{\sin z}{z^3 - z^2}, \qquad b)\ f(z) = \frac{3z^2+4}{z^3+1}, \qquad c)\ f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{(z-\pi)^8}.$$

Řešení

H1 a) Funkci buďto z definice zderivujeme (což není nijak těžké) anebo prohlásíme, že funkce $g(z) = z$ a $h(z) = 1$ jsou holomorfní v $\mathbb{C}$ (zderivovat je přímo triviální), přičemž $f = g \cdot g \cdot g + (h+h+h+h) \cdot g \cdot g - (h+h+h+h+h)$. Funkce f vznikla jako konečný počet sečtení a násobení holomorfních funkcí, proto f je holomorfní v $\mathbb{C}$.

b) V bodě $z_0 = 0$ funkce nemůže být diferencovatelná, neboť v něm nemá derivaci ani její zúžení na $\mathbb{R}$. Zvolme libovolně bod $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vyšetřujme limitu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0}.$$

Označme $z_0 = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$ a parametrizujme $z_1 = z_0 + \frac{1}{n}$, $z_2 = z_0 + \frac{i}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě z $n \to \infty$ plyne $z_{1,2} \to z_0$. Pak je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_0 + \frac{1}{n}| - |z_0|}{z_0 + \frac{1}{n} - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(a+\frac{1}{n})^2 + b^2} - \sqrt{a^2+b^2}}{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{2a + \frac{1}{n}}{\sqrt{(a+\frac{1}{n})^2 + b^2} + \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z_0|},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_0 + \frac{i}{n}| - |z_0|}{z_0 + \frac{i}{n} - z_0} = \frac{-ib}{|z_0|},$$

Pokud má být funkce f diferencovátelná v bodě z_0, musí platit $a = -ib$. Avšak $a, b \in \mathbb{R}$, tedy $a = b = 0$. To je však spor s výběrem bodu z_0. Funkce tedy není komplexně diferencovatelná nikde v $\mathbb{C}$.

c) Zvolme $z_0 \in \mathbb{C}$ a stejně jako v b) parametrizujeme $z_1 = z_0 + \frac{1}{n}$, $z_2 = z_0 + \frac{i}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Opět $n \to \infty$ implikuje $z_{1,2} \to z_0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{z_0 + \frac{1}{n}} - \overline{z_0}}{z_0 + \frac{1}{n} - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{z_0} + \frac{1}{n} - \overline{z_0}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

avšak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{z_0 + \frac{i}{n}} - \overline{z_0}}{z_0 + \frac{i}{n} - z_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{z_0} - \frac{i}{n} - \overline{z_0}}{\frac{i}{n}} = -1.$$

Limity se nerovnají pro libovolný bod $z_0 \in \mathbb{C}$, proto f není diferencovatelná nikde v $\mathbb{C}$.

H2 a) Je

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 - z^2} = \frac{1}{z(z-1)} \cdot \frac{\sin z}{z}.$$

Funkce f je definovaná všude v $\mathbb{C}$ kromě bodů $z = 0$ a $z = 1$. Funkce

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

je holomorfní rozšíření funkce $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ na celé $\mathbb{C}$ (je to mocninná řada s poloměrem konvergence ∞).

Vidíme (ověřte si z definice), že funkce $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ má jednoduché póly v bodech $z = 0$ a $z = 1$. Rezidua v těchto pólech tedy spočteme jako

$$\operatorname{res}(f, 0) = \operatorname{res}(\frac{1}{z(z-1)}, 0) \cdot \lim_{z \to 0} g(z) = g(0) \cdot \lim_{z \to 0} \frac{1}{z(z-1)} \cdot z = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$\operatorname{res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{\sin z}{z^2(z-1)} \cdot (z-1) = \sin 1.$$

b) Máme

$$f(z) = \frac{3z^2+4}{z^3+1} = \frac{3z^2+4}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{3(z+\frac{2}{\sqrt{3}}i)(z-\frac{2}{\sqrt{3}}i)}{(z+1)(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2})(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2})},$$

z čehož je patrné, že polynomy v čitateli a jmenovateli jsou nesoudělné a také, že funkce má jednoduché póly v bodech $z_1 = -1, \ z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Limitami snadno určíme rezidua:

$$\operatorname{res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} f(z)(z - z_1) = \frac{7}{3},$$

$$\operatorname{res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} f(z)(z - z_2) = \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{3},$$

$$\operatorname{res}(f, z_3) = \lim_{z \to z_3} f(z)(z - z_3) = \frac{1 + 2\sqrt{3}i}{3}.$$

c) Upravíme

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{(z-\pi)^8} = \frac{2i \sin z}{(z-\pi)^8}.$$

Protože $\sin \pi = 0$, ale $(\sin)'(\pi) = \cos \pi = -1$, je $z_0 = \pi$ jednoduchým nulovým bodem funkce sinus. Odhadujeme tedy, že funkce f má pól v $z_0 = \pi$ násobnosti 7. Ověříme. Zavedeme funkci

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{(z-\pi)^8} \cdot (z-\pi)^8 = \sin z & z \neq \pi \\ 0 & z = \pi. \end{cases}$$

Vidíme, že funkce g a sinus se shodují všude na $\mathbb{C}$, tedy $g(z) = \sin z$, a tak g je holomorfní na okolí π (dokonce v celém $\mathbb{C}$). Funkce f má tedy v π pól stupně nejvýše 7. Zřejmě pro každé $k < 7, \ k \in \mathbb{N}$ funkce

$$h_k(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{(z-\pi)^8} \cdot (z-\pi)^{k+1} = \frac{\sin z}{(z-\pi)^{7-k}} & z \neq \pi \\ 0 & z = \pi. \end{cases}$$

nejsou ani spojité v bodě π (pro $k = 6$ je $\lim_{z \to \pi} h_6(z) = -1$ a pro $k < 6$ je dokonce $\lim_{z \to \pi} h_k(z) = \infty$); nemohou být proto holomorfní na jakémkoliv okolí π. Dostáváme, že funkce f má v bodě $z_0 = \pi$ pól násobnosti (stupně) 7. Vypočteme reziduum pomocí derivování (viz *poznámka*)

$$\operatorname{res}(f, \pi) = \lim_{z \to \pi} \frac{1}{7!} (\frac{2i \sin z}{(z-\pi)^8} \cdot (z-\pi)^8)^{(7)} = \lim_{z \to \pi} \frac{2i}{7!} (\sin z)^{(7)} = \frac{-2i}{7!} \cos \pi = \frac{2i}{7!}.$$

.

Poznámka Na přednášce/cvičení jsme si uváděli v pravidlech pro výpočet reziduí, že pokud má funkce f v bodě z_0 pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$, lze reziduum spočítat derivováním

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} [f(z)(z - z_0)^n]^{(n-1)},$$

kde pokládáme $g^{(0)}(z) = g(z)$ pro každou funkci g. Celý tento postup lze odůvodnit rozvojem funkce f v Laurentovu řadu na okolí z_0. Pro z z jistého okolí bodu z_0 je totiž

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Potom je ale jistě

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} [f(z)(z-z_0)^n]^{(n-1)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} [\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+n}]^{(n-1)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} [\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k]^{(n-1)} =$$

$$= \sum_{k=n-1}^{\infty} \lim_{z \to z_0} a_{k-n} (z - z_0)^{k-n+1} = a_{-1} \cdot 1 + a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... = a_{-1} = \operatorname{res}(f, z_0).$$

Z tohoto postupu je jasné, že pokud f má v z_0 pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$, lze reziduum spočítat i derivováním řádu vetšího než $n - 1$. Vskutku, pro $m \geq n,\ m \in \mathbb{N}$, je

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{m!} [f(z)(z-z_0)^{m+1}]^{(m)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{m!} [\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m+1}]^{(m)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{m!} [\sum_{k=-n+m+1}^{\infty} a_{k-m-1} (z-z_0)^k]^{(m)} =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \lim_{z \to z_0} a_{k-m-1} (z - z_0)^{k-m} = a_{-1} \cdot 1 + a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... = a_{-1} = \operatorname{res}(f, z_0).$$