Řešení domácí úlohy z 11. cvičení

Matěj Novotný

11.12.2012

Úlohy na doma

H1 Spočítejte následující integrály s pomocí poznatků z komplexní analýzy. Odůvodněte.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2+3z+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x+1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

1) Úlohu můžeme zjednodušit rozdělením zlomku (funkce) na lichou a sudou část. Náš výpočet to příliš neulehčí, ale v některých příkladech je toto vhodným trikem. tedy

$$f_o(z) = \frac{3z}{z^4+1},\ f_e(z) = \frac{2z^2+1}{z^4+1}.$$

Je zřejmé, že $\int_{\mathbb{R}} f_o = 0$, proto budeme počítat pouze se sudou částí. Zavedeme křivku φ (přesněji řečeno rodinu křivek $\{\varphi_r\}_{r>0}$) předpisem $\varphi_r = \varphi_{1,r} \dot{+} \varphi_{2,r}$, kde

$$\varphi_{1,r}(t) = t,\ t \in [-r, r]$$
$$\varphi_{2,r}(t) = re^{it},\ t \in (0, \pi).$$

Křivky $\varphi_r, r > 0$ jsou tedy uzavřené. Funkce f_e je meromorfní v komplexní rovině se čtyřmi póly v bodech $z_{1,3} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ a $z_{2,4} = \frac{\mp 1 \mp i}{\sqrt{2}}$, a proto platí dle reziduové věty pro každé $r > 1$

$$\int_{\varphi_r} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z,\ z \text{ je pól } f_e} \operatorname{res}(f_e, z) \operatorname{ind}(z, \varphi_r) = 2\pi i(\operatorname{res}(f_e, z_1) + \operatorname{res}(f_e, z_2)).$$

Poslední rovnost plyne z toho, že křivka pro $r > 1$ obíhá z pólů pouze body $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ a $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, a to jednou v kladném směru. Spočteme rezidua. Póly $z_{1,2}$ jsou jednoduché, čitatel f_e je holomorfní v $\mathbb{C}$, počítáme proto

$$\operatorname{res}\Big(\frac{2z^2+1}{z^4+1}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(2\Big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^2+1\Big) \operatorname{res}\Big(\frac{1}{z^4+1}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2\sqrt{2}(2i+1)}{(1+i+1-i)(1+i+1+i)(1+i-1+i)} = \frac{1-3i}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{res}\Big(\frac{2z^2+1}{z^4+1}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(2\Big(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big)^2+1\Big) \operatorname{res}\Big(\frac{1}{z^4+1}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2\sqrt{2}(-2i+1)}{(-1+i-1-i)(-1+i+1+i)(-1+i-1+i)} = $$
$$= \frac{-1-3i}{4\sqrt{2}}.$$

Máme tedy

$$\int_{\varphi_r} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(\frac{1-3i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-3i}{4\sqrt{2}}\Big) = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

Funkce f_e je spojitá na okolí nekonečna, proto platí (1)

$$\frac{3\pi}{\sqrt{2}} \overset{(1)}{=} \lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z + \lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_{2,r}} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z.$$

K dokončení příkladu stačí dokázat, že je limita vpravo rovna nule. Protože existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $r > 1$ a $z \in \mathbb{C},\ |z| = r$ platí

$$\Big|\frac{2z^2+1}{z^4+1}\Big| < \frac{c}{r^2},$$

proto je

$$|\int_{\varphi_{2,r}} \frac{2z^2+1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z| \le \int_{\varphi_{2,r}} |\frac{2z^2+1}{z^4+1}|\,\mathrm{d}z \le \frac{c}{r^2}\pi r = \frac{\pi c}{r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) Provedeme substituci

$$\begin{aligned} e^{ix} &= z \\ ie^{ix}\mathrm{d}x &= \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}z}{iz}. \end{aligned}$$

Je tedy $\cos x = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ a $\sin z = \frac{-i}{2}(z-z^{-1})$. Pokud označíme integrační cestu po substituci jako křivku $\varphi,\ \varphi(z) = e^{iz},\ z \in [0, 2\pi)$, můžeme psát

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x + 1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_\varphi \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}{2+\frac{-i}{2}(z-\frac{1}{z})}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{z^2+2z+1}{z(-iz^2+4z+i)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{(z+1)^2}{z(-iz^2+4z+i)}\,\mathrm{d}z.$$

Integrand je meromorfní funkce v $\mathbb{C}$, proto integrál spočítáme za pomoci reziduové věty. Určíme póly:

$$\begin{aligned} -iz^2+4z+i &= 0 \\ D &= 16-4 = 12 \\ z_{1,2} &= \frac{-4\pm\sqrt{12}}{-2i} = (-2\pm\sqrt{3})i \\ z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dále vidíme, že $\mathrm{ind}(z_1,\varphi) = \mathrm{ind}(z_3,\varphi) = 1$ a $\mathrm{ind}(z_2,\varphi) = 0$. Spočítáme rezidua v bodech z_1 a z_3:

$$\begin{aligned} r_1 := \mathrm{res}[\frac{(z+1)^2}{z(-iz^2+4z+i)}, (-2+\sqrt{3})i] &= \frac{((-2+\sqrt{3})i+1)^2}{i(-2+\sqrt{3})\cdot(-i)((-2+\sqrt{3})i-(-2-\sqrt{3})i)} = \\ &= \frac{-6+4\sqrt{3}+i(-4+2\sqrt{3})}{i(6-4\sqrt{3})} \\ r_2 := \mathrm{res}[\frac{(z+1)^2}{z(-iz^2+4z+i)}, 0] &= \frac{(0+1)^2}{(0+0+i)} = \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x+1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{(z+1)^2}{z(-iz^2+4z+i)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{i}(r_1+r_2) = 2\pi(\frac{-6+4\sqrt{3}+i(-4+2\sqrt{3})}{i(6-4\sqrt{3})}+\frac{6-4\sqrt{3}}{i(6-4\sqrt{3})}) =$$

$$= 2\pi\frac{i(-4+2\sqrt{3})}{i(6-4\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$