Řešení domácí úlohy z 2. cvičení

Matěj Novotný

9.10.2012

Úlohy na doma

H1 *(0,5 bodu)* Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ na } [0,5], \qquad b)\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^n}{nx} & x \in (0,\infty) \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ na } [0,\infty), \qquad c)\ f_n(x) = \frac{2x}{x+n} \text{ na } (-1,\infty).$$

Řešení

H1 a) Pro $x = 0$ je $f_n(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a pro $x \in (0,5]$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot \frac{1}{x^2} = 0. \tag{1}$$

Tedy $f_n \to 0$ na $[0,5]$. Pomocí suprem vyšetříme stejnoměrnou konvergenci f_n. Derivujeme:

$$0 = (f_n(x) - 0)' = n \cdot \frac{1+n^2x^2-2x^2n^2}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow 1 = x^2n^2.$$

Uvažujeme $x \in [0,5]$, tedy $x = \frac{1}{n}$. Potom je pro všechna n přirozená

$$S_n := \sup_{x\in[0,5]} |\frac{nx}{1+n^2x^2}| = \max\{0, \frac{1}{2}, \frac{5n}{1+25n^2}\} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \neq 0$, nekonverguje posloupnost f_n stejnoměrně k nule na $[0,5]$.
Uvažme libovolné $\delta \in (0,5)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\delta}$ platí

$$s_n := \sup_{x\in[\delta,5]} |\frac{nx}{1+n^2x^2}| = \frac{n\delta}{1+n^2\delta^2}$$

a $\lim_{n\to\infty} s_n \overset{(1)}{=} 0$. Tedy $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,5]$.

H1 b) Opět je snadné zjistit, že pro všechna $x \in (0,\infty)$ platí

$$0 \leq |\frac{\sin x^n}{nx}| \leq \frac{1}{nx},$$

což implikuje

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\frac{\sin x^n}{nx}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0,$$

a tedy $f_n \to 0$ na $[0,\infty)$, neboť $f_n(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme zvlášť na intervalu $[0,1]$ a intervalu $[1,\infty)$.
Pro všechna $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq x^n \leq x$ a protože sin na $[0,1]$ roste, máme $0 \leq \sin x^n \leq \sin x \leq x$.
Tedy lze odhadnout

$$0 \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in(0,1]} \frac{\sin x^n}{nx} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Z toho plyne $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.
Vyšetříme konvergenci na druhém intervalu:

$$0 \le \sup_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{\sin x^n}{nx}\right| \le \frac{1}{n\cdot 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $[1,\infty)$. Celkem dostáváme $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,\infty)$.

H1 c) Bodová konvergence: zvolíme $x \in (-1,\infty)$ libovolně. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x}{x+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2x}{\frac{x}{n}+1} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot 2x = 0.$$

Tedy $f_n \to 0$ na $(-1,\infty)$.
Jelikož jsou funkce $f_n = f_n(x) = \frac{2x}{x+n} = 2(1-\frac{n}{x+n})$ rostoucí na $(-1,\infty)$, platí pro $n>2$

$$S_n := \sup_{x\in(-1,\infty)} \left|\frac{2x}{x+n}\right| = \max\{\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+n}, \left|\frac{-2}{n-1}\right|\} = 2.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} S_n = 2 \neq 0$ a f_n nemohou konvergovat stejnoměrně na celém $(-1,\infty)$. Pro $K \in (-1,\infty)$ (a $n>1$) je opět

$$\sup_{x\in(-1,K]} \left|\frac{2x}{x+n}\right| = \max\{\left|\frac{2K}{K+n}\right|, \left|\frac{-2}{n-1}\right|\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Proto pro každé $K \in (-1,\infty)$ platí $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-1,K]$, v důsledku čehož $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} 0$ na $(-1,\infty)$.