Řešení domácí úlohy z 3. cvičení

Matěj Novotný

16.10.2012

Úlohy na doma

H1 Vyšetřete možný definiční obor a obor spojitosti funkce f, pokud je zadána jako

$$a)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n x, \qquad b)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}.$$

H2 Pro která $x \in [0, \infty)$ konverguje následující řada? Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}.$$

Řešení

H1 a) Snadno nahlédneme, že se jedná o geometrickou řadu s kvocientem $q = \operatorname{arctg} x$. Řada je konvergentní právě tehdy když $|q| = |\operatorname{arctg} x| < 1$. Z toho plyne $x \in (-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1) = D_f$. Zároveň umíme geometrické řady sčítat. Platí

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}^n x = -1 + \frac{1}{1 - \operatorname{arctg} x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 - \operatorname{arctg} x}, \quad x \in (-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1).$$

Jak je vidět, $f \in \mathcal{C}(D_f)$.

H1 b) Vyšetříme definiční obor f za pomoci limitního srovnávacího kritéria. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \overset{VOAL}{=} |x| \in [0, \infty). \tag{1}$$

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje díky (1) pro každé $x \in \mathbb{R}$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$. Máme tedy $D_f = \mathbb{R}$. Potřebujeme-li vyšetřit spojitost f, je nejjednoduší vyšetřit lokálně stejnoměrnou konvergenci, neboť $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nalezneme lokální extrémy funkcí f_n:

$$0 = f_n'(x) = \frac{x^2 + n^2 - 2x^2}{(x^2+n^2)^2} \Rightarrow x = \pm n.$$

Tedy f_n je na intervalu $[-n, n]$ rostoucí a lichá. Nechť je nyní $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > M := \max\{|a|, |b|\}$, platí

$$s_n := \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x}{x^2+n^2}\right| = \frac{M}{M^2+n^2}.$$

Vzhledem k (1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{M^2+n^2}$ konverguje a Weierstraßova věta nám dává $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} \overset{loc.}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$. Z vlastnosti $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ již plyne $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

H2 Předně je si třeba uvědomit, že pro $x > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ není $(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}$ v reálném oboru definováno, neboť $1 - \sqrt[n]{x} < 0$. Dalším pozorováním je, že pro $x = 0$ řada nekonverguje; $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \sqrt[n]{0})^{3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$. Vyšetříme nyní konvergenci pro x z intervalu $(0, 1]$. Použijeme opět limitního srovnávacího kritéria.

$$\forall x \in (0,1] : \ (1 - \sqrt[n]{x})^{3/2} \geq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{e^{\frac{1}{n}\log x} - 1}{\frac{1}{n}\log x}(-\log x))^{3/2} \overset{Heine}{=} (-\log x)^{3/2} & \text{pokud } x \in (0,1). \end{cases} \tag{2}$$

Heineho větu jsme mohli použít, protože byl splněn předpoklad $\frac{\log x}{n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vídíme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = (-\log x)^{3/2} \in [0, \infty).$$

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, konverguje pro každé $x \in (0,1]$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}$. Každá z funkcí $f_n = f_n(x) = (1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}$, $n \in \mathbb{N}$ je kladná a klesající na $(0,1]$, a proto

$$S_n := \sup_{x\in(0,1]} |1 - \sqrt[n]{x}|^{3/2} = 1.$$

Není nutno dodávat, že na $(0,1]$ není splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence pro řady, totiž, že $f_n \rightrightarrows 0$, neboť $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \neq 0$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2}$ nekonverguje stejnoměrně na $(0,1]$.
Pro libovolné $1 > \delta > 0$ je však

$$s_n := \sup_{x\in[\delta,1]} |1 - \sqrt[n]{x}|^{3/2} = |1 - \sqrt[n]{\delta}|^{3/2}$$

a $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ konverguje na základě limitního srovnávacího kritéria provedeného v (2). Weierstraßova věta nám dává $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \sqrt[n]{x})^{3/2} \overset{loc.}{\rightrightarrows}$ na $(0,1]$.