Řešení domácí úlohy ze 4. cvičení

Matěj Novotný

23.10.2012

Úlohy na doma

H1 Vyšetřete definiční obor, obor spojitosti a obor diferencovatelnosti funkce f, pokud je zadána jako

$$a)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3x^2+1}, \qquad b)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{x^n}{1+x^n}).$$

Řešení

H1 a) Určíme nejprve definiční obor f, tj. množinu takových $x \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje. Zřejmě $0 \in D_f$. Dále je pro $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|}{n^3x^2+1}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{x^2+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{|x|} \in (0,\infty).$$

Limitní srovnávací kritérium s posloupností $\frac{1}{n^3}$ nám dává absolutní konvergenci řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.
Spojitost vyšetříme pomocí stejnoměrné konvergence. Vyšetřeme průběh funkcí $f_n(x) := \frac{x}{n^3x^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Derivujme:

$$f_n'(x) = (\frac{x}{n^3x^2+1})' = \frac{n^3x^2+1-2n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2} = \frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2}.$$

Má-li platit $f_n'(x) = 0$, pak je $1 = n^3x^2$, čili $x = \pm n^{-3/2}$. Protože každá z funkcí f_n, $n \in \mathbb{N}$ je lichá, platí

$$S_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{n^3x^2+1}| = \max\{\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n^3x^2+1}, \frac{n^{-3/2}}{n^3n^{-3}+1}\} = \max\{0, \frac{1}{2n^{3/2}}\} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Suma $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ konverguje a proto dle Weierstraßovy věty platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3x^2+1} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Protože je ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n spojitá na $\mathbb{R}$, máme $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Zbývá vyšetřit derivaci. Suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2}$ zřejmě nekonverguje pro $x = 0$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|1-n^3x^2|}{(n^3x^2+1)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n^3}-x^2|}{x^4+\frac{2x^2}{n^3}+\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{x^2} \in (0,\infty), \tag{1}$$

proto řada v bodě x konveguje dle l.s.k. Derivací zkoumejme extrémy:

$$0 = (\frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2})' = \frac{-2n^3x(n^3x^2+1)^2 - (1-n^3x^2)\cdot 4n^3x(n^3x^2+1)}{(n^3x^2+1)^4} \Longrightarrow$$

$$-x(n^3x^2+1) = (1-n^3x^2)\cdot 2x \Rightarrow$$

$$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{n^3}}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \pm\sqrt{3}n^{-3/2} = 0$, existuje pro každý interval $[c,d] \subseteq (0,\infty)$ jisté $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt{3}n^{-3/2} < c$ pro libovolné $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$. Pro takový interval $[c,d]$ a k taková n potom platí

$$s_n := \sup_{x\in[c,d]} |\frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2}| = \frac{|1-n^3c^2|}{(n^3c^2+1)^2},$$

neboť funkce je na (c,∞) monotónní s nulovou limitou v nekonečnu. Vzhledem k argumentu (1) je $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ konvergentní. Weierstraßova věta nám dává $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2} \rightrightarrows$ na $[c,d]$. Z toho tedy plyne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2} \overset{loc.}{\rightrightarrows}$ na $(0,\infty)$ a ze sudosti i na $(-\infty,0)$. Dosazením do věty o derivování řad funkcí získáme, že funkce f je diferencovatelná na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Poznámka: Všimněte si, že jsme nikde nedokázali, jestli má funkce f derivaci v nule. Ukázali jsme pouze, že funkce $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^3x^2}{(n^3x^2+1)^2}$ není v nule definovaná a na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ je derivací f. Šlo by ukázat, že $f'(0)=\infty$.

b) Pokud má řada konvergovat, je třeba, aby $\log(\frac{x^n}{1+x^n}) \to 0$, čili $\frac{x^n}{1+x^n} \to 1$. To vidíme, že nastane jen v případě, že $|x|>1$. Vyzkoušíme limitní srovnávací kritérium. Pro každé $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\log(\frac{x^n}{1+x^n})|}{\frac{1}{|x|^n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log(\frac{x^n}{1+x^n})}{\frac{x^n}{1+x^n}-1}\right| \cdot \left|\frac{\frac{x^n}{1+x^n}-1}{\frac{1}{x^n}}\right| \overset{(1)}{=} 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{-1}{1+x^n}}{\frac{1}{x^n}}\right| = 1 \in (0,\infty),$$

kde (1) platí protože $\frac{x^n}{1+x^n} \neq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ a každé $n\in\mathbb{N}$. Protože je $|x^{-1}|<1$, je $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{-n}$ konvergentní. Z toho je tedy $D_f = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Spojitost vyšetříme pomocí lokálně stejnoměrné konvergence. Zvolme $[c,d]\subseteq D_f$ a označme $\alpha := \min\{|c|,|d|\}$. Máme

$$S_n := \sup_{x\in[c,d]} |\log(\frac{x^n}{1+x^n})| = \begin{cases} |\log(\dfrac{c^n}{1+c^n})|, & [c,d]\subseteq(1,\infty) \\ |\log(\dfrac{d^n}{1+d^n})|, & [c,d]\subseteq(-\infty,-1) \end{cases} = |\log(\frac{\alpha^n}{1+\alpha^n})|.$$

Absolutní hodnota z logaritmu je rostoucí na $(1,\infty)$ a klesající na $(0,1)$ a vyšetřit monotonii či načrtnout graf vnitřní funkce je snadný úkol, ze kterého zbytek plyne (proveďte!). V každém případě je dle už jednou provedeného limitního srovnávacího kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ konvergentní a proto je z Weierstraßovy věty $\sum_{n=1}^{\infty}\log(\frac{x^n}{1+x^n}) \overset{loc.}{\rightrightarrows}$ na D_f a platí $f\in\mathcal{C}(D_f)$. Vyšetříme derivaci.

$$(\log(\frac{x^n}{1+x^n}))' = \frac{1+x^n}{x^n}\cdot\frac{nx^{n-1}(1+x^n)-nx^{2n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{n}{x(1+x^n)}.$$

Naším cílem je vyšetřit, kde suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x(1+x^n)}$ konverguje lokálně stejnoměrně. Zvolme $[c,d]\subseteq D_f$ a označme $\alpha := \min\{|c|,|d|\}$, (nezávisle na předcházejícím označení). Bude platit

$$s_n := \sup_{x\in[c,d]} \left|\frac{n}{x(1+x^n)}\right| \leq \frac{n}{1+\alpha^n} \leq \frac{n}{\alpha^n}.$$

Protože $0<\alpha^{-1}<1$, konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{-n}$ dle D'Alembertova podílového kritéria (proveďte!) a tedy musí díky srovnávacímu kritériu konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$. Weierstraßova věta nám dává $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x(1+x^n)} \overset{loc.}{\rightrightarrows}$ na D_f a tedy podle věty o derivování řad je f diferencovatelná na D_f a pro všechna $x\in D_f$ platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x(1+x^n)}.$$