Řešení domácí úlohy z 5. cvičení

Matěj Novotný

30.10.2012

Úlohy na doma

H1 Určete poloměr konvergence řad.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(n^2!) z^n.$$

H2 Sečtěte a odůvodněte!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} 2^{-n}.$$

Řešení

H1 a) Rozepíšeme-li si řadu jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} z^{n^2} = \frac{1}{3} z + \frac{1}{3^2} z^4 + \frac{1}{3^3} z^9 + \frac{1}{3^4} z^{16} + \dots ,$$

potom vidíme, že koeficienty mocninné řady jsou

$$a_k = \begin{cases} 0 & \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq k \\ 3^{-\sqrt{k}} & \exists n \in \mathbb{N} : n^2 = k. \end{cases}$$

Potom je jistě

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} (3^{-\sqrt{k}})^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 3^{-1/\sqrt{k}} = 3^0 = 1.$$

Je tedy $R = \frac{1}{1} = 1$.

b) Odhadneme:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ 1 \leq \sqrt[n]{\log(n^2!)} \leq \sqrt[n]{\log(n^2)^{n^2}} = \sqrt[n]{n^2 \log n^2} = \sqrt[n]{2n^2 \log n} \leq \sqrt[n]{2n^3}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} \overset{voal}{=} 1$, platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n^2!)} = 1$ a tedy $R = \frac{1}{1} = 1$.

H2 Definujme funkci

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} 2^{-n} z^{3n+1}.$$

Určíme nejprve definiční obor funkce, tedy potřebujeme znát poloměr konvergence řady. Koeficienty mocninné řady a_k, $k \in \mathbb{N}_0$ jsou

$$a_k = \begin{cases} 0 & \forall n \in \mathbb{N} : 3n+1 \neq k \\ \frac{1}{k}(\frac{1}{2})^{\frac{k-1}{3}} & \exists n \in \mathbb{N} : 3n+1 = k. \end{cases}$$

Odtud již

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}(\frac{1}{2})^{\frac{k-1}{3}})^{1/k}=(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}})(\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{2})^{\frac{k-1}{3k}})=1\cdot(\frac{1}{2})^{1/3},$$

$$R=\sqrt[3]{2},\ D_g=(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}).$$

Mocninnou řadu lze uvnitř kruhu konvergence libovolně derivovat a přitom platí

$$g'(z)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}2^{-n}z^{3n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3n+1}2^{-n}z^{3n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{3n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z^3}{2})^n=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{z^3}{2}}-1=\frac{2}{2-z^3}-1,\qquad z\in D_g.$$

Pro vhodné $c\in\mathbb{R}$ a libovolné $z\in D_g$ tedy musí platit

$$g(z)=\int(\frac{2}{2-z^3}-1)\,\mathrm{d}z\overset{*}{=}\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}(\log(2^{1/3}z^2+2^{2/3}z+2)-2\log(2-2^{2/3}z)+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2^{2/3}z+1}{\sqrt{3}}))-z+c.$$

(* Každý si rozloží na parciální zlomky a zintegruje sám.)
Protože

$$-c=g(0)-c=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}(\log 2-2\log 2+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}})),$$

a $1\in D_g$, je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}2^{-n}=g(1)=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}(\log(2^{1/3}+2^{2/3}+2)-2\log(2-2^{2/3})+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2^{2/3}+1}{\sqrt{3}}))-1+\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}(\log 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}).$$