Řešení domácího úkolu ze 7. cvičení

12.11.2012

Úlohy na doma

H1 Dokažte pomocí rozvoje do Taylorovy řady identitu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

H2 Podle vzorce ze skript napište Fourierovy koeficienty funkce f, je-li na $(0, 2\pi)$ rovna

$$a)\ f(x) = x, \qquad b) f(x) = x^2$$

a na zbytku $\mathbb{R}$ periodicky dodefinována.

H3 Podle vzorce ze skript napište Fourierovy koeficienty funkce f, je-li na $(-\pi, \pi)$ rovna

$$a)\ f(x) = x, \qquad b) f(x) = x^2$$

a na zbytku $\mathbb{R}$ periodicky dodefinována.

Řešení

H1 Taylorovy rozvoje funkcí $\exp, \cos, \sin$, jsou následující:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

přičemž poloměr konvergence všech řad je roven ∞. Uvnitř kruhu, tedy na $\mathbb{C}$ (či na $\mathbb{R}$) jsou řady absolutně konvergentní a můžeme je libovolně přerovnávat. Tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

H2 a) Fourierovy koeficienty integrovatelné funkce $f : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}$ jsou obecně tvaru

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \ \mathrm{d}t, n \in \mathbb{N}_0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \ \mathrm{d}t, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dosadíme a integrujeme:

$$\int_0^{2\pi} t \cos nt \ \mathrm{d}t = [t \frac{\sin nt}{n}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{n} \ \mathrm{d}t = 0 + [\frac{\cos nt}{n^2}]_0^{2\pi} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos 0 \ \mathrm{d}t = [t^2/2]_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

čili $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $a_0 = 2\pi$. Dále

$$\int_0^{2\pi} t\sin nt \ \mathrm{d}t = [-t\frac{\cos nt}{n}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{n} \ \mathrm{d}t = \frac{-2\pi}{n} + [\frac{\sin nt}{n^2}]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tak $b_n = -2/n$.

b) Opět dosazením do vzorečku dostáváme

$$\int_0^{2\pi} t^2\cos nt \ \mathrm{d}t = [\frac{t^2\sin nt}{n}]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} t\sin nt \ \mathrm{d}t = 0 + \frac{4\pi}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

neboť poslední z integrálů jsme již počítali.

$$\int_0^{2\pi} t^2\cos 0 \ \mathrm{d}t = [t^3/3]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3},$$

Celkově tak dostáváme $a_n = 4/n^2, \ n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \frac{8}{3}\pi^2$. Počítejme dále

$$\int_0^{2\pi} t^2\sin nt \ \mathrm{d}t = [\frac{-t^2\cos nt}{n}]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} t\cos nt \ \mathrm{d}t = -\frac{4\pi^2}{n} + 0,$$

tedy $b_n = -4\pi/n$.

H3 Jestliže je funkce f 2π-periodická a na $(0, 2\pi)$ integrovatelná, jsou nutně 2π-periodické i integrovatelné funkce $t \mapsto f(t)\cos nt$ a $t \mapsto f(t)\sin nt$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Proto platí

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \ \mathrm{d}t$$

a stejně tak pro sinus. Spočteme nyní Fourierovy koeficienty funkce f:
a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt \ \mathrm{d}t = 0,$$

funkce $t \mapsto t$ je totiž lichá, kosinus v nt sudý a jejich součin tedy lichá funkce. Je tedy $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dále

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt \ \mathrm{d}t = [\frac{-t\cos nt}{n}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{n} \ \mathrm{d}t = \frac{-2\pi(-1)^n}{n} + [\frac{\sin nt}{n^2}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1},$$

a tedy $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.

b) Dosaďme

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt \ \mathrm{d}t = [\frac{t^2\sin nt}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt \ \mathrm{d}t = 0 + \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n, \ n \in \mathbb{N},$$

tedy $a_n = 4(-1)^n/n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $a_0 = 2\pi^2/3$. Opět díky paritě funkcí $t \mapsto t^2\sin nt$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = 0$.