Řešení domácí úlohy z 8. cvičení

Matěj Novotný

20.11.2012

Úlohy na doma

H1 Napište Fourierovu řadu funkce $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2t)) + \sin^3 t + \cos^3 t$.

Řešení

Nejprve vyřešíme úlohu pro funkci $t \mapsto \sin^3 t + \cos^3 t$. Dle vzorce platí

$$\sin^3 t = (\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i})^3 = \frac{e^{3it} - e^{-3it} - 3(e^{it} - e^{-it})}{-4 \cdot 2i} = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t,$$

$$\cos^3 t = (\frac{e^{it} + e^{-it}}{2})^3 = \frac{e^{3it} + e^{-3it} + 3(e^{it} + e^{-it})}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t,$$

proto Fourierovy řady těchto funkcí jsou rovny přímo pravým stranám rovností. U funkce $t \mapsto \operatorname{sgn}(\sin(2t))$ vidíme, že je 2π-periodická a protože je složením dvou (tří) lichých funkcí (sin a sgn, případně $t \mapsto 2t$), je také lichá. Z toho plyne, že její cosinové Fourierovy koeficienty $a_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ budou nulové. Spočteme ty sinové:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\sin(2t)) \sin nt \ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sgn}(\sin(2t)) \sin nt \ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}(\int_{0}^{\pi/2} \sin nt \ \mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin nt \ \mathrm{d}t) =$$

$$= \frac{2}{\pi}([\frac{-\cos nt}{n}]_0^{\pi/2} - [\frac{-\cos nt}{n}]_{\pi/2}^{\pi}) = \frac{2}{n\pi}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1 - (-1)^n + \cos(\frac{n\pi}{2})) =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}(1 + (-1)^n - 2\cos(\frac{n\pi}{2})) = \begin{cases} \frac{-8}{n\pi} & \exists k \in \mathbb{N}_0,\ n = 4k+2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Sečtením Fourierových řad jednotlivých funkcí dostáváme Fourierovu řadu funkce f:

$$F_f(t) = \frac{3}{4}\sin t + \frac{3}{4}\cos t - \frac{4}{\pi}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 3t + \frac{1}{4}\cos 3t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin((4n+2)t).$$