Řešení domácí úlohy z 9. cvičení

Matěj Novotný

27.11.2012

Úlohy na doma

H1 Na intervalu $(0, \pi)$ rozviňte funkci $f(x) = 1 + x$ do
a) sinové
b) cosinové řady.

Řešení

H1 a) Funkci f dodefinujeme na intervalu $(-\pi, 0]$ liše, tj.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \in (0, \pi) \\ 0 & x = 0 \\ -1 + x & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Lze samozřejmě psát také $f(x) = x + \operatorname{sgn} x,\ x \in (-\pi, \pi)$. Spočítáme Fourierovy koeficienty f. Cosinové $a_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ budou jistě nulové. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x + \operatorname{sgn} x) \sin nx \ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + x) \sin nx \ \mathrm{d}x = \frac{-2}{\pi}[(1 + x)\frac{\cos nx}{n}]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}((1 + \pi)(-1)^n - 1) + \frac{2}{\pi}[\frac{\sin nx}{n^2}]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - (1 + \pi)(-1)^n).$$

Tedy sinová řada pro f bude rovna

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin nx}{n\pi}(1 - (1 + \pi)(-1)^n),$$

a protože f je na $(-\pi, \pi)$ monotónní a platí $f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ pro všchna $x \in (-\pi, \pi)$, plyne z Jordanovy věty rovnost $F_f(x) = f(x)$ pro všchna $x \in (-\pi, \pi)$.

H1 b) Funkci f dodefinujeme na intervalu $(-\pi, 0]$ sudě, tj.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \in (0, \pi) \\ 1 - x & x \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

Zápis lze zkrátit psaním $f(x) = 1 + |x|,\ x \in (-\pi, \pi)$. Zřejmě sinové koeficienty funkce f budou rovny nule. Spočítáme ty cosinové:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + |x| \ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}[x + \frac{x^2}{2}]_0^{\pi} = 2 + \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + |x|) \cos nx \ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + x) \cos nx \ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}[\frac{(1 + x)\sin nx}{n}]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \ \mathrm{d}x =$$

$$0 + \frac{2}{\pi}[\frac{\cos nx}{n^2}]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Funkce f je na $(-\pi, \pi)$ po částech monotónní a spojitá, proto z Jordanovy věty plyne

$$f(x) = F_f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)\cos nx}{n^2\pi}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$