1. cvičení z MA III

Matěj Novotný

2.10.2012

Úlohy na cvičení

G1 Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$a)\ f_n(x) = x^{2n} - x^{3n} \text{ na } [0,1], \qquad b)\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \text{ na } [0,1], \qquad c)\ f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \text{ na } \mathbb{R},$$

$$d)\ f_n(x) = x^n - x^{n-1} \text{ na } [0,1], \quad e)\ f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \text{ na } (0,\infty), \quad f)\ f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n} \text{ na } [0,\infty),$$

$$g)\ f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) \text{ na } [1,\infty), \qquad h)\ f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ na } [0,\infty).$$

Výsledky

V následujícím bude f označovat bodovou limitu posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a)\ f = 0,\ f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0,1), \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \quad f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0,1),$$

$$c)\ f = 0,\ f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ na } \mathbb{R}, \qquad d)\ f = 0,\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } [0,1], \qquad e)\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } [\varepsilon,\infty),$$

$$f)\ f(x) = \max\{1,x\},\ f_n \rightrightarrows f \text{ na } [0,\infty), \qquad g)\ f(x) = \log x,\ f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ na } [1,\infty),$$

$$h)\ f(x) = e^x,\quad f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0,\infty).$$

Úlohy na doma

H1 *(0,5 bodu)* Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$a)\ f_n(x) = x^n - x^{2n} \text{ na } [0,1], \qquad b)\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \text{ na } \mathbb{R}, \qquad c)\ f_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \text{ na } \mathbb{R}.$$