3. cvičení z MA III

Matěj Novotný

16.10.2012

Úlohy na cvičení

G1 Pro která $x \in \mathbb{R}$ konvergují následující řady? Vyšetřete intervaly stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergence a rozhodněte, ve kterých bodech je součet řady spojitý.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}, \qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}), \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{2x}{x^2+n^3}), \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2(\frac{x^2}{n+x^2}),$$

G2 Vyčíslete.

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n+x}\,\mathrm{d}x, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \begin{cases} (n+1)x^n & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Výsledky

G1 Označme vždy f_n jako n-tý částečný součet řady a f jako bodovou limitu posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Množinu, pro jejíž každý prvek x existuje $\lim_n f_n(x)$ a platí $\lim_n f_n(x) < \infty$, chápeme jako definiční obor f.

a) $D_f = (1,5)$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na D_f, b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty,\varepsilon]$ a $[\varepsilon,\infty)$, c) $D_f = \mathbb{R}$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na D_f,
d) $D_f = \mathbb{R}$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na D_f, e) $D_f = [0,\infty)$, $f_n \rightrightarrows f$ na D_f, f) $D_f = \mathbb{R}$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na D_f,
g) $D_f = \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ na D_f, h) $D_f = \mathbb{R}$, $f_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f$ na D_f.

Pro všechna $\alpha \in \{a,b,c,...,h\}$ platí $f_\alpha \in \mathcal{C}(D_{f_\alpha})$.

G2 a) $\frac{1}{2}$, b) 0, c) 1.

Úlohy na doma

H1 Vyšetřete možný definiční obor a obor spojitosti funkce f, pokud je zadána jako

$$a)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n x, \qquad b)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}.$$

H2 Pro která $x \in [0,\infty)$ konverguje následující řada? Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\sqrt[n]{x})^{3/2}.$$