5. cvičení z MA III

Matěj Novotný

30.10.2012

Úlohy na cvičení

G1 Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4z^n}{3},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6z)^n}{n},\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2!)z^n}{n^{2n}},\qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n!}}{(n!)^2},\qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}z^{n^3+n^2},$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(na^n+\frac{b^n}{n^2})z^n,\quad 0<a<b,\qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}z^{2n},\quad a>0,\qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(n!)!}z^n$$

G2 Sečtěte. Využijte Abelovy věty, kde je třeba.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1},\qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

G3 Rozviňte do mocninné řady a určete její poloměr konvergence.

$$a)\ \operatorname{arctg} x,\qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^2-1},\qquad c)\ \frac{1}{1+2x^2+x^4},\qquad d)\ \sin^2 x.$$

Výsledky

G1

a) $R=1$, b) $R=\frac{1}{6}$, c) $R=0$, d) $R=1$, e) $R=1$, f) $R=\frac{1}{b}$, g) $R=\begin{cases}0 & a\le 1\\ \infty & a>1,\end{cases}$, h) $R=\infty$.

G2

a) $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$, c) 2, d) $\frac{3}{2}$.

Úlohy na doma

H1 Určete poloměr konvergence řad.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^{n^2},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log(n^2!)z^n.$$

H2 Sečtěte a odůvodněte!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}2^{-n}.$$