Zápočtová písemka z PSI, paralelka 107, 20.11.2014

T1 Možné znaky na vstupu jsou $0, 1, 2$. Zařízení je přečte a uloží. Pravděpodobnost, že znak 1 nebo 2 přečte a uloží správně, je 80%, přičemž pokud zařízení udělá chybu, pak vždy zamění 1 za 2 a naopak. Chyby se vyskytují nezávisle. Nulu přečte a uloží správně vždy. Pravděpodobnost, že na vstupu se objeví 0, je rovna 40%, pravděpodobnost každého ze znaků 1 a 2 je 30%.

a) Jaká je pravděpodobnost, že se znak na vstupu uloží jako 2? (`4 body`)

b) Uložily se znaky $(1, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že byly oba na vstupu? (`6 bodů`)

T2 Náhodná veličina X má distribuční funkci danou předpisem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \dfrac{x+5}{5} & -4 \le x < -3 \\ \dfrac{2}{5} & -3 \le x < 0 \\ \dfrac{2x+4}{5} & 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1 & x \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Určete hodnoty $\mathbf{P}(X < -10)$, $\mathbf{P}(X = -4)$, $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}\left(X \in \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}\right)$, $\mathbf{P}(-4 \le X \le \frac{1}{2})$. (`5 bodů`)

b) Když rozdělíme X na směs náhodných veličin $\mathrm{Mix}_w(U, V)$, kde U je diskrétní, V absolutně spojitá a $w \in [0, 1]$, nalezněte hustotu veličiny V. (`5 bodů`)

T3 Počet bodů ze zkouškové písemky je náhodná veličina pohybující se v rozmezí $0 - 100$, s průměrem 53 a rozptylem 839. Celkem 200 studentů psalo zkouškový test. Určete pravděpodobnost, že průměrný počet bodů u těchto studentů byl menší než 50 a uveďte za jakých předpokladů. (`10 bodů`)

Řešení

T1 Označme V_i, resp. U_i jev, že znak na vstupu je i, resp. že se znak uloží jako i, pro $i = 0, 1, 2$. V úloze a) počítáme dle věty o úplné pravděpodobnosti

$$\mathbf{P}(U_2) = \mathbf{P}(U_2|V_1) \cdot \mathbf{P}(V_1) + \mathbf{P}(U_2|V_2) \cdot \mathbf{P}(V_2) + \mathbf{P}(U_2|V_0) \cdot \mathbf{P}(V_0) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 = 0.3.$$

Neboť role 1 a 2 je symetrická, máme také $\mathbf{P}(U_1) = 0.3$. Řešíme-li úlohu b), zjistíme nejprve pomocí Bayesovy věty, že

$$\mathbf{P}(V_1|U_1) = \frac{\mathbf{P}(U_1|V_1) \cdot \mathbf{P}(V_1)}{\mathbf{P}(U_1)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.3} = 0.8.$$

Protože chyby se vyskytují nezávisle, platí

$$\mathbf{P}(V_{(1,1)}|U_{(1,1)}) = (\mathbf{P}(V_1|U_1))^2 = 0.8^2 = 0.64.$$

T2 a) Pravděpodobnosti jsou následující

$$\mathbf{P}(X < -10) = 0,\ \mathbf{P}(X = -4) = \frac{1}{5},\ \mathbf{P}(X = 0) = \frac{2}{5},\ \mathbf{P}\left(X \in \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}\right) = 0,\ \mathbf{P}(-4 \le X \le \frac{1}{2}) = 1.$$

b) Pokud $X = \mathrm{Mix}_w(U, V)$, kde U je diskrétní a V absolutně spojitá, potom $F_X = wF_U + (1-w)F_V$, přičemž w je dáno "součtem pravděpodobnosti u diskrétní části X", tj. součtem skoků: $w = \mathbf{P}(X \in \{-4; 0\}) = \mathbf{P}(X = -4) + \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Tedy $(1 - w) = \frac{2}{5}$. Aby platilo

$$\lim_{x \to \infty} F_V(x) = 1,$$

musíme z F_X odečíst "skoky"a vynormovat vše konstantou $(1-w)^{-1} = \frac{5}{2}$. Čili máme

$$F_V(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \cdot 0 & x < -4 \\ \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{x+5}{5} - \frac{1}{5} \right) & -4 \leq x < -3 \\ \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) & -3 \leq x < 0 \\ \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2x+4}{5} - \frac{3}{5} \right) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \right) & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dostáváme

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \frac{x+4}{2} & -4 \leq x < -3 \\ \frac{1}{2} & -3 \leq x < 0 \\ \frac{2x+1}{2} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Odkud derivací skoro všude dostáváme hustotu

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -4 \leq x < -3 \\ 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

T3 Označme X_i počet bodů i-tého studenta, $i \in \{1, 2, ..., 200\}$ a dále $X = \sum_{i=1}^{200} X_i$. Hledáme pravděpodobnost

$$\mathcal{P} = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i}{200} < 50 \right) = \mathbf{P}(X < 10^4) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 200 \cdot 53}{\sqrt{200}\sqrt{839}} < \frac{10^4 - 200 \cdot 53}{\sqrt{200}\sqrt{839}} \right).$$

Pokud jsou veličiny X_i nezávislé, (což nejsou např., když studenti opisují), platí podle CLV

$$U = \frac{X - 10600}{\sqrt{200}\sqrt{839}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Tedy lze psát

$$\mathcal{P} = \mathbf{P}\left(U < \frac{-600}{409.63} \right) = \Phi(-1.46) = 1 - \Phi(1.46) = 1 - 0.93 = 0.07.$$