Vzorová písemka z PSI

13.11.2014

.

T1 Na technické vysoké škole se čtyřmi fakultami A,B,C,D studuje jen 13.85% dívek, přičemž na fakultě A je třikrát snažší potkat dívku než na fakultě B. Na fakultě C studuje 15% dívek (tedy 85% kluků), na fakultě D jich je 10% (tedy 90% kluků). Poměr počtu studentů na jednotlivých fakultách uvádí následující tabulka. Každý student studuje právě na jedné fakultě.

fakulta	A	B	C	D
studentů	10%	35%	24%	31%

a) Jakou máte šanci, že když potkáte studenta z fakulty A, že to bude dívka?

b) Pokud jste právě potkali dívku z technické vysoké školy, na jaké fakultě nejpravděpodobněji/nejméně pravděpodobně studuje? Jaká je šance, že studuje fakultu D?

c) Pokud za závěsem stojí student technické vysoké školy, s jakou pravděpodobností je to kluk studující na fakultě C?

T2 Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na čtverci s rohy $[0, 2]$, $[2, 0]$, $[0, 0]$ a $[2, 2]$. Určete sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}$, sdruženou hustotu $f_{X,Y}$ a střední hodnotu náhodného vektoru $(X+3, 2Y)$.

T3 Délka zubního kartáčku se řídí normálním rozdělením o střední hodnotě 14cm a rozptylu 6cm. Pouzdro je dlouhé 13.5cm. Jaká je pravděpodobnost, že vezmeme-li libovolný jeden kartáček, že se do pouzdra akorát vejde, tj. nebude o více než 1cm kratší?

Řešení

T1 a) Označme po řadě A, B, C, D jevy, že vybraný student studuje na fakultě A,B,C,D a F, že student je ženského pohlaví. Protože jsou jevy A, B, C, D možné (tj. žádný z nich není nemožný), po dvou disjunktní, a $\mathbf{P}(A \cup B \cup C \cup D) = 1$, platí dle věty o úplné pravděpodnosti

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(F|A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(F|B) \cdot \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(F|C) \cdot \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(F|D) \cdot \mathbf{P}(D).$$

Víme, že $\mathbf{P}(F|A) = 3\mathbf{P}(F|B)$, a dále $\mathbf{P}(F|C) = 0.15$, $\mathbf{P}(F|D) = 0.1$. Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} 0.1385 &= 3\mathbf{P}(F|B) \cdot 0.1 + \mathbf{P}(F|B) \cdot 0.35 + 0.15 \cdot 0.24 + 0.1 \cdot 0.31 \\ 0.0715 &= 0.065 \cdot \mathbf{P}(F|B) \\ \mathbf{P}(F|B) &= 0.11. \end{aligned}$$

Tedy pravděpodobnost, že náhodně vybraný student z fakulty B je dívka, činí 11%. Z toho plyne, že pravděpodobnost, že náhodně vybraný student z fakulty A je dívka, činí $3 \cdot 11\% = 33\%$.

b) Chceme uspořádat pravděpodobnosti $\mathbf{P}(A|F)$, $\mathbf{P}(B|F)$, $\mathbf{P}(C|F)$, $\mathbf{P}(D|F)$ dle velikosti a znát přesnou hodnotu $\mathbf{P}(D|F)$. Dle definice dostáváme

$$\mathbf{P}(D|F) = \frac{\mathbf{P}(D \cap F)}{\mathbf{P}(F)} = \frac{\mathbf{P}(F|D) \cdot \mathbf{P}(D)}{\mathbf{P}(F)} = \frac{0.1 \cdot 0.31}{0.1385} \doteq 0.224.$$

Tedy pravděpodobnost, že dívka bude studovat na fakultě D, je přibližně rovna 22%. Chceme-li znát pouze uspořádání pravděpodobností, že dívka studuje na té které fakultě, a ne jejich přesné hodnoty, lze porovnávané výrazy jistě pronásobit členem $\mathbf{P}(F)$: to na uspořádání nic nezmění. Tedy namísto výrazů $\mathbf{P}(A|F)$, $\mathbf{P}(B|F), ...$, se budeme zabývat výrazy $\mathbf{P}(A \cap F)$, $\mathbf{P}(B \cap F), ...$ Máme tedy

$$\mathbf{P}(A \cap F) = \mathbf{P}(F|A) \cdot \mathbf{P}(A) = 0.33 \cdot 0.1 = 0.033$$

a obdobným způsobem zjistíme, že $\mathbf{P}(B \cap F) = 0.0385$, $\mathbf{P}(C \cap F) = 0.036$ a $\mathbf{P}(D \cap F) = 0.031$. Porovnáním zjistíme, že s největší pravděpodobností dívka studuje na fakultě B, naopak nejméně pravděpodobné je, že studuje na fakultě D.

c) Chceme zjistit hodnotu výrazu $\mathbf{P}(C \cap \overline{F})$, kde $\overline{X}$ značí doplněk jevu X. Čili

$$\mathbf{P}(\overline{F} \cap C) = \mathbf{P}(\overline{F}|C) \cdot \mathbf{P}(C) = (1 - \mathbf{P}(F|C)) \cdot \mathbf{P}(C) = 0.85 \cdot 0.24 = 0.204,$$

a tedy pravděpodobnost, že za závěsem stojí kluk z fakulty C, je asi 20%.

Poznámka Všimněte si, že pro libovolné dva jevy A, B, $\mathbf{P}(B) > 0$ platí $\mathbf{P}(A|B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}|B)$. Rozepsáním rovnost snadno dokážete.

T2 Protože (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na čtverci o obsahu 4, sdružená hustota má tvar

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x, y) \in [0, 2]^2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Její integrací dostaneme sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}$.

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \min(x, y) < 0 \\ \dfrac{\min(x, 2) \cdot \min(y, 2)}{4} & \min(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Střední hodnota náhodného vektoru $(X+3, 2Y)$ je díky linearitě rovna $\mathbb{E}(X+3,2Y) = (\mathbb{E}X+3, 2\mathbb{E}Y)$. Z obrázku je jasné, že $\mathbb{E}X = 1, \mathbb{E}Y = 1$, formálně bychom střední hodnotu vypočetli pomocí marginálních hustot. Nejprve

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}y = \frac{1}{2} & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2], \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} & y \in [0,2] \\ 0 & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

Tedy

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1,$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y}{2}\ \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = 1.$$

Tedy střední hodnota náhodného vektoru $(X+3, 2Y)$ je rovna $(4,2)$.

c) Označíme-li délku zubního kartáčku X, potom platí $X \sim N(14,6)$. Chceme znát $\mathbf{P}(12.5 < X < 13.5)$. Náhodná veličina

$$U = \frac{X-14}{\sqrt{6}}$$

bude mít normované normální rozdělení, proto

$$\mathbf{P}(12.5 < X < 13.5) = \mathbf{P}\left(\frac{12.5-14}{\sqrt{6}} < \frac{X-14}{\sqrt{6}} < \frac{13.5-14}{\sqrt{6}}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{-1.5}{\sqrt{6}} < U < \frac{-0.5}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{-1.5}{\sqrt{6}}\right) = \left(1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{6}}\right)\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{6}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{6}}\right) = 0.729 - 0.579 = 0.15.$$

Pravděpodobnost, že se kartáček do pouzdra akorát vejde, činí 15%.