

Příklady na počítání z PST

31.3.2015

P1 Náhodná veličina Y má hustotu

$$f_Y(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 & u \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4u - 2 & (\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & u > 1. \end{cases}$$

Nalezněte předpis distribuční funkce F_Y , střední hodnotu a rozptyl.

P2 V populaci trpí 3% chorobou A a 8% chorobou B. Vyšetření na chorobu A ukáže správně, zda je člověk nakažen chorobou A s 85% úspěšností (ať je zdravý či nemocný). Vyšetření na chorobu B ukáže výsledek správně v 70% případů, pokud člověk trpí chorobou B, v 60% případů, pokud trpí chorobou A, ale netrpí chorobou B a v 90% případů, pokud netrpí žádnou z chorob.

- Trpím-li chorobami A i B, jaká je pravděpodobnost, že dám-li se vyšetřit na obě choroby, že obě choroby budou odhaleny?
- Mám pozitivní test na chorobu B. Jaká je pravděpodobnost, že trpím chorobou A?

P3 Hodíme 4x šestistěnnou kostkou a 2x mincí. Rub platí jako bod, líc ne. Náhodná veličina X udává počet bodů, kolik jsme dohromady hodili. Určete $\mathbb{E}X$, $\text{var } X$.

P4 Za sebou jsou zařízení A, B a C. Z A vyšleme znak 0 nebo 1. Zařízení B jej zachytí správně s pravděpodobností 0.7. Zařízení B pošle dál, co zachytilo. Zařízení C znak rozpozná správně s pravděpodobností 0.8.

- Jaká je pravděpodobnost, že C zachytí v tomto pořadí znaky (1,1), pokud jsme z A vyslali znaky (1,0)?
- Jaká je pravděpodobnost, že jsme z A vyslali znaky (0,0), pokud C přečetlo zprávu (1,1)?

P5 Když vypravěč vypráví nějaký svůj zážitek, je šance 40%, že si vymýšlí - nezávisle na tom, kdy si vymýšlel naposledy a o jakém zážitku vypráví. Děti to poznají v 70% případů, ale zase mu ve 20% případů nevěří, i když si zrovna nevymýšlí - nezávisle na tom, kdy mu nevěřili naposledy a co za příběh vypráví (což je velice překvapivé, ale je to tak).

- Jaká je pravděpodobnost, že následující zážitek budou děti vypravěči věřit?
- Vypravěč vyprávěl dva zážitky, ale děti mu ani jeden nevěřily. Jaká je šance, že se skutečně stal alespoň jeden z nich?

P6 Náhodná veličina X má hustotu danou předpisem

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{4} & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}} & 2 < x < \frac{33}{16} \\ 0 & \frac{33}{16} \leq x < 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \leq x \leq c \\ 0 & x > c, \end{cases}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

a) Určete konstantu c a hodnoty $\mathbf{P}(X < 0)$, $\mathbf{P}(X = 0)$.

b) Napište předpis pro distribuční funkci F_X .

P7 Možné znaky na vstupu jsou 0, 1, 2. Zařízení je přečte a uloží. Pravděpodobnost, že znak 1 nebo 2 přečte a uloží správně, je 80%, přičemž pokud zařízení udělá chybu, pak vždy zamění 1 za 2 a naopak. Chyby se vyskytují nezávisle. Nulu přečte a uloží správně vždy. Pravděpodobnost, že na vstupu se objeví 0, je rovna 40%, pravděpodobnost každého ze znaků 1 a 2 je 30%.

a) Jaká je pravděpodobnost, že se znak na vstupu uloží jako 2?

b) Uložily se znaky (1, 1). Jaká je pravděpodobnost, že byly oba na vstupu?

P8 Náhodná veličina X má distribuční funkci danou předpisem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ \frac{x+5}{5} & -4 \leq x < -3 \\ \frac{2}{5} & -3 \leq x < 0 \\ \frac{2x+4}{5} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Určete hodnoty $\mathbf{P}(X < -10)$, $\mathbf{P}(X = -4)$, $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X \in \{-3, \frac{1}{2}\})$, $\mathbf{P}(-4 \leq X \leq \frac{1}{2})$.

b) Nalezněte střední hodnotu $\mathbb{E}X$.