

Písemka ze PST, vzor 1

T1 Ráno si náhodně vyberu tričko ze skříně. S pravděpodobností 20% bude červené, s pravděpodobností 30% zelené a na 50% hnědé. Můj barvoslepý kamarád vždy hádá, tričko jaké barvy mám na sobě. Pokud je červené, pozná to na 45%, pokud je zelené či hnědé, pozná to na 70%. Jaká je šance, že pozná, jakou barvu má tričko, které mám dnes na sobě?

T2 Náhodná veličina W má hustotu

$$f_W(u) = \begin{cases} \frac{c-1}{3} & u \in [-1, 5) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu $c \in \mathbb{R}$ a nalezněte střední hodnotu $\mathbb{E}W$.

T3 Náhodně zvolím reálné číslo z intervalu $[2, 3]$ (předpokládám rovnoměrné rozdělení) a odečtu od něj jedničku. Výsledné číslo udává délku strany čtverce M . Jaký je průměrný obsah čtverce M ?

Náznak řešení a výsledky

T1 Označím jevy, že si vyberu dané tričko postupně C, Z, H a jev, že kamarád uhádl barvu mého trička jako $+$. Potom je dle věty o úplné pravděpodobnosti

$$\mathbf{P}(+) = \mathbf{P}(+|C) \cdot \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(+|Z) \cdot \mathbf{P}(Z) + \mathbf{P}(+|H) \cdot \mathbf{P}(H) = 0.45 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.65.$$

T2 Musí platit

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_W(u) \, du = \int_{-1}^5 \frac{c-1}{3} \, du = 6 \cdot \frac{c-1}{3},$$

tedy $c = \frac{3}{2}$. Dále

$$\mathbb{E}W = \int_{-\infty}^{\infty} u f_W(u) \, du = \int_{-1}^5 \frac{u}{6} \, du = 2.$$

T3 Veličina M má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[1, 2]$, má tedy hustotu

$$f_M(u) = \begin{cases} 1 & u \in [1, 2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Obsah čtverce je roven M^2 , chceme-li znát jeho průměrnou hodnotu, počítáme

$$\mathbb{E}M^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_M(u) \, du = \int_1^2 u^2 \, du = \frac{7}{3}.$$