Písemka ze PST, vzor 2

T1 Baba Jaga prokleje každého pátého, kdo k ní přijde. Z trpaslíků udělá lidi a z lidí trpaslíky. V populaci je 75% lidí a 25% trpaslíků. Jaká je pravděpodobnost, že když z populace náhodně vyberete bytost a pošlete ji za Babou Jagou, že se vrátí trpaslík?

T2 Náhodná veličina S má distribuční funkci

$$F_S(u) = \begin{cases} 0 & u < -2 \\ \frac{1}{2} & u \in [-2, 0) \\ \frac{2+u}{4} & u \in [0, 2) \\ 1 & u \geq 2. \end{cases}$$

Určete její střední hodnotu.

T3 Z jednotkového kruhu vybereme náhodně bod (přepokládáme rovnoměrné rozdělení). Veličina U vyjadřuje vzdálenost bodu od kružnice, tj. od okraje kruhu. Nalezněte distribuční funkci F_U a střední hodnotu $\mathbb{E}U$.

Náznak řešení a výsledky

T1 Označím jevy, že vybereme ze společnosti člověka, resp. trpaslíka po řadě C, T a jev, že baba Jaga bytost proklela jako $\star$. Označme jev, že se vrátí trpaslík T_V. Protože $\mathbf{P}(\star) = \frac{1}{5}$ a jevy $\star, C$ ani $\star, T$ nejsou závislé, máme

$$\mathbf{P}(T_V) = \mathbf{P}(C \cap \star) + \mathbf{P}(T \cap \overline{\star}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{20}.$$

T2 Náhodná veličina má jak diskrétní část (skok v bodě -2 o velikosti $\frac{1}{2}$), tak spojitou (vše ostatní). Proto musíme do střední hodnoty započítat obě části. Nechť p_d označuje pravděpodobnostní funkci "diskrétní části"a nechť f_s označuje hustotu "spojité části"(Ani jedna z funkcí není pravděpodobnostní funkce ani hustota v pravém slova smyslu). Pak derivací F_S skoro všude dostáváme

$$f_s(u) = \begin{cases} \frac{1}{4} & u \in [0, 2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases},$$

tedy

$$\mathbb{E}S = \sum_{\text{v } a \text{ je skok}} a \cdot p_d(a) + \int_{-\infty}^{\infty} u f_s(u) \, \mathrm{d}u = -2 \cdot \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{u}{4} \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}.$$

T3 Jelikož obsah kruhu o poloměru α je $\pi\alpha^2$, po nakreslení obrázku lze vytušit, že distribuční funkce F_U má předpis

$$F_U(u) = \mathbf{P}(U \leq u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1^2\pi - \pi(1-u)^2}{\pi} = 2u - u^2 & u \in [0, 1) \\ 1 & u \geq 1. \end{cases}$$

Z toho plyne, že hustota f_U a střední hodnota jsou rovny

$$f_U(u) = \begin{cases} 2 - 2u & u \in [0, 1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad \mathbb{E}U = \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) \, \mathrm{d}u = \int_0^1 2u - 2u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}.$$