Písemka ze PST, vzor 3

T1 Hodíme dvěma kostkami. Označme jevy
A : Na první kostce padlo liché číslo.
B : Na druhé kostce padla nejvýše trojka.
C : Součet hodů je lichý.
Určete, zda jsou jevy A, B, dále B, C a A, C nezávislé. Co lze říci o nezávislosti jevů A, B, C?

T2 Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot z tabulky:

X	-1	0	1	3
p_X	c	3c	0.4	0.2

Určete konstantu $c \in [0, 1]$. Určete distribuční funkci F_X a střední hodnotu $\mathbb{E}X$.

T3 Náhodně vyberu jedno z čísel $1, 2, 3, 4$ (všechny mají stejnou pravděpodobnost) a označím jej a. Jaká je průměrná hodnota veličiny $S = \frac{a^3+2a}{2}$?

Náznak řešení a výsledky

T1 Především $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$ (u C si lze například rozepsat všech 36 možností, co může padnout, z čehož dává polovina sudý součet a polovina lichý).
Jevy A, B jsou nezávislé, neboť každý je vázaný na jinou kostku a kostky hází nezávisle.
Jev $A \cap C$ znamená, že na první kostce padlo liché číslo a na druhé sudé číslo. Tyto dva jevy jsou nezávislé a pravděpodobnost každého z nich je $\frac{1}{2}$, proto je $\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C)$. Tedy jevy A, C jsou nezávislé.
Při jevu $B \cap C$ mohou nastat možnosti

1. Na druhé kostce padla jednička a na první sudé číslo. Tyto dva jevy jsou nezávislé a mají po řadě pravděpodobnosti $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{2}$.
2. Na druhé kostce padla dvojka a na první liché číslo. Tyto dva jevy jsou nezávislé a mají po řadě pravděpodobnosti $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{2}$.
3. Na druhé kostce padla trojka a na první sudé číslo. Tyto dva jevy jsou nezávislé a mají po řadě pravděpodobnosti $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{2}$.

Celkem je tedy
$$\mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C),$$
a proto jsou jevy B, C nezávislé.
Jev $A \cap B \cap C$ znamená, že na první kostce padlo liché číslo a na druhé dvojka. Tyto jevy jsou nezávislé a mají po řadě pravděpodobnosti $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{6}$. je tedy $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$. Jevy A, B, C tedy nejsou nezávislé, jsou pouze po dvou nezávislé.

T2 Musí platit
$$1 = \sum_{X=a} p_X(a) = c + 3c + 0.4 + 0.2,$$
z čehož vyřešením rovnice plyne $c = 0.1$. Distribuční funkce je tedy rovna
$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -1 \\ 0.1 & u \in [-1, 0) \\ 0.4 & u \in [0, 1) \\ 0.8 & u \in [1, 3) \\ 1 & u \geq 3. \end{cases}$$

Střední hodnotu spočteme jednoduše:

$$\mathbb{E}X = \sum_{X=a} a \cdot p_X(a) = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 = 0.9.$$

T3 Veličina a má pravděpodobnostní funkci

a	1	2	3	4
p_a	0.25	0.25	0.25	0.25

Je třeba spočítat

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}\left(\frac{a^3 + 2a}{2}\right) = \sum_{\alpha=1,2,3,4} \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2} \cdot p_a(\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1,2,3,4} \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2} = 15.$$