

1. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

23.9.2014

Úlohy na cvičení

G1 Nalezněte maximální definiční obory funkcí. Pod značením $\log x$ rozumějte přirozený logaritmus, tj. $\ln x$.

- a) $\sqrt{\cos x}$
- b) $\cos \sqrt{x}$
- c) $\log(\log(x^2 + 3x - 39))$
- d) $\frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\log(\sin x \cos x)}$.

G2 Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich platnosti.

- a) $\forall x, z \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x + z)^n \leq 0$
- b) $\exists x, z \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x^2 + z)^3 \geq \frac{n^2}{x+1}$
- c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - 1| < \delta) \Rightarrow (0 \leq |x| \leq \varepsilon)$.

G3 Úprava výrazů.

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Z tohoto vzorce mimo jiné plyne vzorec pro součet geometrické řady:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & q \neq 1, \\ n+1 & q = 1. \end{cases}$$

G4 Reálná čísla. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je omezená zdola, pokud existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x \geq c, x \in M$. Obdobně definujeme omezenost množiny shora. Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se zove omezená, je-li omezená zdola i shora. Dokažte či vyvráťte následující tvrzení:

- a) Množina $U \subseteq \mathbb{R}$ je omezená tehdy a jen tehdy, platí-li $\exists w \in \mathbb{N} \forall z \in M : (|z| < w)$.
- b) Je-li $D \subseteq \mathbb{R}$ omezená, potom je $E := \{x^2, x \in D\}$ taktéž omezená.
- c) Není-li $H \subseteq \mathbb{R}$ omezená, pak existuje $H_1 \subseteq H$ omezená a $H_2 \subset H, H_2 \neq H$ neomezená.