

2. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

30.9.2014

Úlohy na cvičení

G1 Nechtě A, B, C jsou množiny, $A \subseteq \mathbb{R}$, $y, z \in \mathbb{R}$. Vyjádřete ekvivalentně (pomocí kvantifikátorů) výroky:

- a) $(A \neq \emptyset)$; $(A \subseteq B)$; $(A \neq B)$; $(A \cap B = \emptyset)$; $(A \cup B = C)$;
b) $(\sup A = y)$; $(\inf A = z)$.

G2 Najděte suprema a infima následujících množin:

- a) $(1, 2) \cup \{\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\}$ b) $\{\frac{5}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
c) $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$
e) $\{\frac{p}{p+q}, p, q \in \mathbb{N}\}$ f) $\{\frac{p+1}{2p+q}, p, q \in \mathbb{N}\}$.

G3 Vypočtěte limity následujících posloupností.

- a) $a_n := \frac{n^2+5n-4}{(n+1)(n-5)}, n \geq 6$
b) $b_n := \frac{\sqrt{n^2-3n-5}-n}{3n+1}, n \geq 5$.

G4 Operace s množinami.

- a) Nechtě A, B, X jsou množiny. Pochopte tzv. de Morganova pravidla: $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
 $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
b) Nechtě X, A_1, A_2, A_3, \dots jsou množiny. Zkuste pochopit de Morganova pravidla pro nekonečně mnoho množin:

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i, \quad X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Úlohy na doma

H1 Určete definiční obor $D(f)$ (pokud není již zadán), obor funkčních hodnot $H(f)$ a pokud lze, nalezněte inverzní funkci f^{-1} , je-li f zadána následovně:

- a) $f(x) = \log(\frac{1-x}{1+x})$. Uvažujte přirozený logaritmus, tj. o základu e .
b) $f(t) = at + (1-t)b, t \in [0, 1]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

H2 Najděte suprema a infima následujících množin (a dokažte, zvládnete-li to, že se nemýlíte!):

- a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{3 - \frac{2}{n}\}$ b) $(-1, 1)$ c) $\{\cos(\pi - \frac{\pi}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ d) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}]$.

H3 Nalezněte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou platí $\sup A \leq \inf A$.

H4 Vypočtěte limity následujících posloupností:

- a) $a_n := \frac{(n-3)^3}{(n+1)(n+2)(2n+1)}$
b) $b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$