8. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

29.10.2014

Úlohy na cvičení

G1 Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity.

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x},\qquad b)\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3},\qquad c)\lim_{x\to\infty}\frac{\log^2 x}{x},\qquad d)\lim_{x\to 0^+} x\log x,\qquad e)\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+3)$$

G2 Spočtěte následující limity. Pokud používáte nějakou větu, nezapomeňte ověřit předpoklady.

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^3-27)}{x-3},\qquad b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}},\qquad c)\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\operatorname{cotg} x},\qquad d)\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

$$e)\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{x},\quad f)\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x-4}},\quad g)\lim_{x\to\infty}\frac{4^{x+1}}{3^x x},\quad h)\lim_{x\to\infty}\frac{e^x x^2+3^x}{3^x x},\quad i)\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\log x,\quad j)\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\sin x}{x^3}.$$

G3 Counterexample. Na následujícím přikladu si všimněte, že předpoklad existence limity $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ je v l'Hospitalově pravidle nezbytný.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Úlohy na doma

H1 Vypočtěte následující limity a postup odůvodněte.

$$a)\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4},\qquad b)\lim_{y\to\infty}\frac{e^y-\log y}{y^2},\qquad c)\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(3x^2+2x+3)}{\log(x^2-2x+1)},\qquad d)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$$

H2 Vypočtěte následující limitu pro $n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^n}{x^{2n}-2(3x)^n+9^n}$$

Výsledky

G1 a)7, b)∞, c)0, d)0, e)0.

G2 a)27, b)0, c)e^2, d)neexistuje, e)∞, f)$\sqrt[4]{e}$, g)∞, h)0, i)0, j)∞.

H1 a)$\frac{1}{4}$, b)∞, c)1, d)$\frac{-1}{2}$

H2 Pro $n=1$ neexistuje, pro $n=2$ je rovna $\frac{1}{36}$, pro $n\geq 3$ je rovna 0.