Řešení vybraných úloh z 8. cvičení

Matěj Novotný

13.4.2016

Úlohy na cvičení

G1 Nalezněte lokální extrémy funkcí

$$e) f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$$

G2 Nalezněte absolutní extrémy funkce f na množině M, je-li zadáno

$$f(x,y,z) = xyz \quad M = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

Výsledky

G1 e) Funkce f je nekonečně-mnohokrát diferencovatelná ve všech bodech $a \in \mathbb{R}^3$, proto pokud má v bodě $a = (x,y,z)$ lokální extrém, platí podmínka

$$(0,0,0) = \bigtriangledown f(x,y,z) = (3x^2 - 3(y+z), 3y^2 - 3(x+z), 3z^2 - 3(x+y)),$$

z čehož dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} x^2 &= y + z, \\ y^2 &= x + z, \\ z^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Odečtením druhé od první dostáváme

$$x^2 - y^2 = y - x,$$

z čehož plyne buďto $x = y$ nebo $x + y = -1$. Protože je $0 \leq z^2 = x + y$, nemůže být $x + y = -1$, tedy dostáváme $x = y$. Aplikujeme-li tento postup znovu na první a třetí rovnici, dostáváme $x = z$, a tedy $x = y = z$. Dosazením do první rovnice získáme $x^2 = 2x$, z čehož $x = 0$ nebo $x = 2$. Celkově tedy máme 2 podezřelé body $a = (0,0,0)$ a $b = (2,2,2)$. Spočítejme matice druhých derivací f:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}^2 f(a) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}^2 f(b) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Jestliže označíme $D_i(a)$, resp. $D_i(b)$ determinant levé horní submatice vzniklé z $\mathrm{d}^2 f(a)$, resp. $\mathrm{d}^2 f(b)$ o velikosti $i \times i$, potom je $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = -9$, $D_3(a) = -162$. Tedy $D_1(a) = 0$, $D_1(a)D_2(a) = 0$, $D_2(a)D_3(a) > 0$. Z toho bohužel nelze nic usoudit, proto musíme zkoumat funkci na okolí bodu a jinak. Pokud se pohybujeme na okolí a po přímce $y = z = 0$, máme $f(x,0,0) = x^3$. Ale $f(x,0,0) < 0 = f(a)$ pro $x < 0$ a $f(x,0,0) > 0 = f(a)$ pro $x > 0$, proto není a bodem lokálního extrému f.

Pro b máme $D_1(b) = 12$, $D_2(b) = 135$, $D_3(a) = 4050$, tedy $D_1(b) > 0$, $D_1(b)D_2(b) > 0$, $D_2(b)D_3(b) > 0$. Matice je tudíž positivně definitní a v bodě b má f lokální minimum.

G2 Funkce f je spojitá na uzavřené a omezené množině M. Nabývá tedy na M svého minima i maxima. Vazebnou podmínku určují funkce $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ a $g_2(x,y,z) = x+y+z$. Nechť je bod (x,y,z) bodem extrému f vzhledem k množině M. Pokud by byly vektory $\bigtriangledown g_1(x,y,z)$ a $\bigtriangledown g_2(x,y,z)$ lineárně závislé, platilo by pro vhodné $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(2x,2y,2z) = \bigtriangledown g_1(x,y,z) = \lambda \bigtriangledown g_2(x,y,z) = \lambda(1,1,1).$$

To by znamenalo $x = y = z$ a aplikací druhé vazebné podmínky $g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$ bychom dostali $x = y = z = 0$. To ale nelze, pokud má platit $0 = g_1(x,y,z)$.

Tedy vektor $\bigtriangledown f(x,y,z)$ je lineární kombinací vektorů $\bigtriangledown g_1(x,y,z), \bigtriangledown g_2(x,y,z)$. Existují tedy $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí maticová rovnice

$$\lambda_1(2x,2y,2z) + \lambda_2(1,1,1) = \bigtriangledown f(x,y,z) = (yz, xz, xy).$$

Celkově dostáváme soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= yz && (1)\\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 &= xz && (2)\\ 2\lambda_1 z + \lambda_2 &= xy && (3)\\ x^2+y^2+z^2 &= 1 && (4)\\ x+y+z &= 0. && (5) \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostáváme $2\lambda_1(x-y) = z(y-x)$, což lze splnit, pokud $2\lambda_1 = -z$ nebo $x = y$. Nechť platí $x = y$. Z (5) ihned plyne $z = -2x$. Dosazením do (4) získáváme $x^2 + x^2 + 4x^2 = 1$ a odtud 2 podezřelé body $a_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Nechť platí $2\lambda_1 = -z$ a $x \neq y$. Potom odečtením třetí rovnice od druhé získáme

$$\begin{aligned} 2\lambda_1(y-z) &= x(z-y),\\ -z(y-z) &= x(z-y),\\ (x-z)(y-z) &= 0. \end{aligned}$$

Pokud $z \neq y$, máme $z = x$ a z (5) $y = -2x$. Tudíž z (4) ihned $(x,y,z) = a_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. Pokud $z = y$, potom je díky (5) $x = -2z$ a z (4) plyne $(x,y,z) = a_{5,6} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$. To jsou všechny možnosti, které mohou nastat. Postupným dosazením všech šesti bodů do předpisu $f(x,y,z) = xyz$ získáme

$$f(a_1) = f(a_3) = f(a_5) = -2 \text{ a } f(a_2) = f(a_4) = f(a_6) = 2.$$

Tedy v bodech $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ nabývá funkce f svého minima vzhledem k množině M a v bodech $\frac{-1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$, $\frac{-1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ a $\frac{-1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ svého maxima vzhledem k množině M.