Laplaceova transformace s Heaviside funkcí

Matěj Novotný

20.12.2014

Základy

Heavisidovou funkci definujeme jako

$$H(t) := \chi_{[0,\infty)}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Je tedy jasné, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je funkce $t \to H(t-a)$ charakteristickou funkcí intervalu $[a,\infty)$. Pokud potřebujeme místo $[a,\infty)$ omezený interval $[a,b)$, kde $a < b \in \mathbb{R}$, vezmeme rozdíl dvou Heaviside funkcí:

$$H(t-b) - H(t-a) = \chi_{[b,\infty)}(t) - \chi_{[a,\infty)}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b) \\ 1 & t \in [a,b). \end{cases}$$

Bez posunutí je Laplaceova transformace funkce $H(t)$ rovna

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^\infty H(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p}, \qquad p > 0,$$

s posunutím (pro $a > 0$) vychází

$$\mathcal{L}(H(t-a))(p) = \int_0^\infty H(t-a)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_a^\infty = \frac{e^{-pa}}{p}, \qquad p > 0.$$

Věta o translaci

Může se stát, že naše funkce f, která je na záporné poloose nulová, je posunutá na ose x o konstantu $a > 0$. Tedy místo funkce f máme funkci $g(t) = f(t-a)$, pro kterou platí $g(t) = 0$, pokud $t < a$. Je-li f exponenciálního řádu α_0, platí věta o translaci:

$$\mathcal{L}(g)(p) = \mathcal{L}(f(t-a))(p) = \int_0^\infty f(t-a)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t-a = x \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int_0^\infty f(x)e^{-p(x+a)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p), \qquad p > \alpha_0.$$

Obecně, pokud f není na záporné poloose nulová, lze ji takovou vyrobit právě součinem s H. Tedy

$$\mathcal{L}(Hf)(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

a také pro posunutí ($a > 0$)

$$\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a))(p) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p).$$

Příklady

$$\mathcal{L}(H(t-4)\cdot(t-4)^3)(p) = e^{-4p}\mathcal{L}(t^3)(p) = \frac{3!e^{-4p}}{p^4},$$

$$\mathcal{L}(H(t-1)\sin(3t-3))(p) = e^{-p}\mathcal{L}(\sin(3t))(p) = \frac{3e^{-p}}{p^2+9},$$

$$\mathcal{L}(H(t-2)\cos^2(t-2))(p) = e^{-2p}\mathcal{L}(\cos^2 t)(p) = e^{-2p}\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}\right)(p) = e^{-2p}\left(\frac{1}{2p}+\frac{p}{2(p^2+4)}\right).$$

Zpětná transformace

Vše, co zatím známe, můžeme využít ve zpětné transformaci. Uveďme tedy pár příkladů.

$$a)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)(t) = H(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t-1) = H(t-1),$$

$$b)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5p}}{p^7}\right)(t) = H(t-5)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^7}\right)(t-5) = H(t-5)\frac{(t-5)^6}{6!},$$

$$\begin{aligned} c)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{pe^{-3p}}{(p+1)^4}\right)(t) &= H(t-3)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^4}\right)(t-3)\\ &= H(t-3)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^3}-\frac{1}{(p+1)^4}\right)(t-3)\\ &= H(t-3)\left(\frac{(t-3)^2}{2}-\frac{(t-3)^3}{3!}\right)e^{-(t-3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2p}(2p+21)}{p^2+6p+34}\right)(t) &= H(t-2)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2p+21}{p^2+6p+34}\right)(t-2)\\ &= H(t-2)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(p+3)}{(p+3)^2+25}+\frac{15}{(p+3)^2+25}\right)(t-2)\\ &= H(t-2)\left(2e^{-3(t-2)}\cos(5(t-2))+3e^{-3(t-2)}\sin(5(t-2))\right)\\ &= H(t-2)e^{-3t+6}\left(2\cos(5(t-2))+3\sin(5(t-2))\right). \end{aligned}$$