Další příklady s Heavisidem

7. ledna 2015

.

G1 Nalezněte Laplaceovu transformaci funkcí

$$a)\ f(t) = \begin{cases} t^2+5 & t\in[0,1) \\ t^3-2 & t\in[1,\infty) \end{cases}, \qquad b)\ g(t) = \begin{cases} t & t\in[0,2) \\ 3t^2e^{-t} & t\in[2,\infty) \end{cases}.$$

Oba příklady budeme řešit stejně: vhodnou úpravou a použitím věty o translaci.

a) Jest

$$f(t) = (t^2+5)(H(t)-H(t-1)) + (t^3-2)H(t-1) = (t^2+5)H(t) + (t^3-t^2-7)H(t-1).$$

Abychom mohli použít větu o translaci, musíme výraz t^3-t^2-7 v proměnné t upravit do proměnné $t-1$. Tedy

$$t^3-t^2-7 = (t-1)^3+2t^2-3t-6 = (t-1)^3+2(t-1)^2+t-8 = (t-1)^3+2(t-1)^2+(t-1)-7.$$

Proto

$$f(t) = (t^2+5)H(t) + \left((t-1)^3+2(t-1)^2+(t-1)-7\right)H(t-1)$$

a odsud už jednoduše

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{2}{p^3}+\frac{5}{p}+e^{-p}\left(\frac{3}{p^4}+\frac{4}{p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{7}{p}\right).$$

b) Jest

$$g(t) = t\,(H(t)-H(t-2)) + 3t^2e^{-t}H(t-2) = tH(t) + \left(3t^2e^{-t}-t\right)H(t-2).$$

Jelikož $t^2 = (t-2)^2+4t-4 = (t-2)^2+4(t-2)+4$, je také

$$3t^2e^{-t}-t = 3\left((t-2)^2+4(t-2)+4\right)e^{-(t-2)}e^{-2}-(t-2)-2.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\mathcal{L}(g)(p) = \mathcal{L}(tH(t))(p) + \mathcal{L}\left(\left(3\left((t-2)^2+4(t-2)+4\right)e^{-(t-2)}e^{-2}-(t-2)-2\right)H(t-2)\right)(p) =$$

$$\frac{1}{p^2}+e^{-2p}\mathcal{L}\left((3(t^2+4t+4)e^{-t}e^{-2}-t-2)H(t)\right)(p) = \frac{1}{p^2}+e^{-2p}\left(\frac{6e^{-2}}{(p+1)^3}+\frac{12e^{-2}}{(p+1)^2}+\frac{12e^{-2}}{p+1}-\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}\right)$$

G2 Nalezněte Laplaceovu transformaci následujících funkcí:

$$f_1(t) = \begin{cases} t+1 & t\in[0,3) \\ 2t & t\in[3,\infty) \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} te^{4t} & t\in[0,1) \\ t^2-1 & t\in[1,\infty) \end{cases}, \qquad f_3(t) = \begin{cases} 2+t & t\in[4,5) \\ 1 & t\geq 0,\ t\notin[4,5) \end{cases},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} e^{2t}+t^2 & t\in[0,5) \\ e^{3t} & t\in[5,\infty) \end{cases}, \qquad f_5(t) = \begin{cases} \sin(3t) & t\in[0,\pi) \\ t\cos t & t\in[\pi,\infty) \end{cases}, \qquad f_6(t) = \begin{cases} \sin t+1 & t\in[0,3\pi) \\ \sin(2t) & t\in[3\pi,\infty) \end{cases},$$

Výsledky

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_1)(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + e^{-3p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\right),\\
\mathcal{L}(f_2)(p) &= \frac{1}{(p-4)^2} + e^{-p}\left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} - \frac{e^4}{(p-4)^2} - \frac{e^4}{p-4}\right),\\
\mathcal{L}(f_3)(p) &= \frac{1}{p} + e^{-4p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{5}{p}\right) - e^{-5p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{6}{p},\right)\\
\mathcal{L}(f_4)(p) &= \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p^3} + e^{-5p}\left(\frac{e^{15}}{p-3} - \frac{e^{10}}{p-2} - \frac{2}{p^3} - \frac{10}{p^2} - \frac{25}{p}\right),\\
\mathcal{L}(f_5)(p) &= \frac{3}{p^2+9} + e^{-\pi p}\left(\frac{1-p^2}{p^2+1} - \frac{\pi p}{p^2+1} + \frac{3}{p^2+9}\right),\\
\mathcal{L}(f_6)(p) &= \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p} + e^{-3\pi p}\left(\frac{2}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
$$

Poznámka U páté a šesté funkce se nabízí využít součtové vzorce pro sin a cos.