17. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

11.1.2016

Úlohy na cvičení

G1 Zapamatujte si následující pravidla pro počítání Laplaceovy transformace. Uvažujme f, g exponenciálního řádu, $p \in \mathbb{R}$ vhodné (takové, aby výrazy dávaly smysl). Označme $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$.

a) $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p-a)$, $a \in \mathbb{R}$, (posun obrazu),

b) $\mathcal{L}(t \cdot f(t))(p) = -F'(p)$, (derivace obrazu),

c) $\mathcal{L}\left(f(kt)\right)(p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{k})$, $k > 0$, (změna měřítka),

d) $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (linearita).

G2 Z definice spočtěte a/nebo pomocí předchozího cvičení odvoďte následující transformace.

$$a)\mathcal{L}(1)(p),\quad b)\mathcal{L}(t^n)(p), n \in \mathbb{N},\quad c)\mathcal{L}(e^{2t})(p),\quad d)\mathcal{L}(\cos)(p),\quad e)\mathcal{L}(\sin)(p),\quad f)\mathcal{L}(\cos(at))(p),\ a > 0,$$

$$g)\mathcal{L}(\sin(at))(p),\ a > 0,\quad h)\mathcal{L}(e^{-3t}\sin t)(p),\quad i)\mathcal{L}(te^{4t})(p),\quad j)\mathcal{L}(t\sin t)(p),\quad k)\mathcal{L}(t^3e^{-t})(p),$$

$$l)\mathcal{L}(e^{7t}\sin t\cos t)(p),\quad m)\mathcal{L}(e^t\cos(3t))(p),\quad n)\mathcal{L}(t\cos(2t)),\quad o)\mathcal{L}(e^{-7t}\sin^2 t)(p),\quad p)\mathcal{L}(e^{3t}\cos^2 t)(p).$$

Výsledky

G2 a) $\frac{1}{p}$, b) $\frac{n!}{p^{n+1}}$, c) $\frac{1}{p-2}$, d) $\frac{p}{p+2}$, e) $\frac{1}{p^2+1}$, f) $\frac{p}{p^2+a^2}$, g) $\frac{a}{p^2+a^2}$, h) $\frac{1}{(p+3)^2+1}$, i) $\frac{1}{(p-4)^2}$, j) $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$, k) $\frac{6}{(p+1)^4}$, l) $\frac{1}{(p-7)^2+4}$, m) $\frac{p-1}{(p-1)^2+9}$, n) $\frac{p^2-4}{p^2+4}$, o) $\frac{1}{2(p+7)} - \frac{1}{2}\frac{p+7}{(p+7)^2+4}$, p) $\frac{1}{2(p-3)} + \frac{1}{2}\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$.