18. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

12.1.2016

Úlohy na cvičení

G1 Zapamatujte si následující pravidla pro počítání Laplaceovy transformace. Uvažujme f, g exponenciálního řádu, $p \in \mathbb{R}$ vhodné (takové, aby výrazy dávaly smysl). Označme $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$.

a) $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0^+)$, (obraz derivace)

b) $\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) + \cdots + f^{(n-1)}(0^+)$, (obraz n-té derivace),

c) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)(p) = \frac{F(p)}{p}$, (obraz funkce horní meze).

G2 Proveďte zpětné Laplaceovy transformace.

$$a)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p^2}\right)(t), \quad b)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p-1)^3}\right)(t), \quad c)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2-1}\right)(t), \quad d)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2p+3}{p^2+4p+5}\right)(t),$$

$$e)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2-6p+13}\right)(t), \quad f)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+3)^7}+\frac{4p-3}{p^2-p+1}\right)(t), \quad g)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{p^2+10p+50}\right)(t).$$

G3 Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující diferenciální/integrodiferenciální rovnice.

$$\begin{array}{ccc} x' - 2x = \sin t & x' + 4x = e^{7t} & x''' + 4x' = 8 \\ x(0^+) = 1 & x(0^+) = 2 & x(0^+) = -1,\ x'(0^+) = 2,\ x''(0^+) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x' + 4x + 4\displaystyle\int_0^t x(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2 + 4t & x'' + x = e^t & x'' - 2x' + 9x = -6e^{2t}\sin 3t + 9t - 2 \\ x(0^+) = 1 & x(0^+) = 2,\ x'(0^+) = 0 & x(0^+) = 0,\ x'(0^+) = 3. \end{array}$$

Výsledky