

2. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

13.10.2015

Úlohy na cvičení

G1 Nechť A, B, C jsou množiny. Vyjádřete ekvivalentně (pomocí kvantifikátorů) výroky: $(A \neq \emptyset)$; $(A \subseteq B)$; $(A = B)$; $(A \neq B)$; $(A \cap B = \emptyset)$; $(A \cup B = C)$;

G2 Určete definiční obor $D(f)$ (pokud není již zadán), obor funkčních hodnot $H(f)$ a pokud lze, nalezněte inverzní funkci f^{-1} , je-li f zadána následovně:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$,

b) $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Uvažujte přirozený logaritmus, tj. o základu e ,

c) $f(t) = a(1-t) + tb$, $t \in [0, 1]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

G3 Vypočtete limity následujících posloupností.

a) $a_n := \frac{n^2+5n-4}{(n+1)(n-5)}$, $n \geq 6$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $b_n := \frac{2n^2-n+3}{(n+1)^3-(n-2)^3}$, $n \in \mathbb{N}$,

c) $c_n := \frac{\sqrt{n^2-3n-5}-n}{3n+1}$, $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

G4 Vypočtete.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)^3}{(n+1)(n+2)(2n+1)}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$.

Výsledky

G1 $A \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in A$,

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$,

$A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \forall y \in B : (x \in B) \wedge (y \in A)$,

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x \in A : x \notin B) \vee (\exists x \in B : x \notin A)$,

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in A : x \notin B$,

$A \cup B = C \Leftrightarrow (\forall x \in A \forall y \in B : x, y \in C) \wedge (\forall x \in C : (x \in A) \vee (x \in B))$.

G2 a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$,

b) $D_f = (-1, 1)$, $H_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$,

c) $H_f = [a, b]$, $f^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

G3 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{2}{9}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

G4 a) $\frac{1}{2}$, b) 0.