# 4. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

20.10.2014

## Úlohy na cvičení

**G1** Rozhodněte, zda následující limity existují a případně, čemu se rovnají.

$$a)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3})\cos n\pi,\qquad b)\lim_{n\to\infty}(\sin n)\left(\sin\frac{1}{n}\right),\qquad c)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+(-1)^n}}{\log n},$$

$$d)\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}(1+n^2\pi),\qquad e)\lim_{n\to\infty}2^{-n}\cos\left(\frac{n}{1+\sqrt{n}}\right).$$

**G2** Spočtěte následující limity; pokud neexistují, rozmyslete si proč.

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n-1}-3^{2n+2}}{9^{n-2}+6^{n+2}},\qquad b)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(-1)^n}\sqrt{3+\frac{1}{n}},\qquad c)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4^n+3^n}}{2^{n-3}},\qquad d)\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4\cos\left(\frac{n^2+1}{n-3}\right)}{(n-1)^3}$$

$$e)\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n^2}{n},\qquad f)\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{(2+n)\pi}{9}\right)\cdot\frac{2^n+3^{n+1}}{4^{n-3}},\qquad g)\lim_{n\to\infty}n+3\sin n,\qquad h)\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-5\cdot(-4)^{n-1}}{\sqrt{2^{4n-2}+3}}.$$

**G3** Pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots\ ,$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\dots\ ,$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\ .$$

Označíme-li $i$ imaginární jednotku, dokažte, že pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Odtud totiž snadno (dosazením nejprve $ix$, poté $-ix$ a sečtením/odečtením rovnic) plyne

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{1}$$

**G4** Použitím vztahu (1) dokažte pro $x,y\in\mathbb{R}$ následující rovnosti:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \tag{2}$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \tag{3}$$

*Hint: U druhé a třetí rovnosti začněte pravou stranou.* Pomocí (2) a (3) odvoďte pro $x\in\mathbb{R}$ tyto rovnosti:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\qquad \sin 3x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\qquad \cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x.$$

## Výsledky

**G1** a),b),c),e) 0, d) $\operatorname{tg} 1$.

**G2** a) $-729$, b) neexistuje (osciluje mezi $\pm\infty$), c) 8, d) 2, e) 0, f) 0, g) $\infty$, h) neexistuje (osciluje mezi $\pm 2.5$).