6. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

3.11.2015

Úlohy na cvičení

G1 Uvěřte v platnost následujících rovností a zapamatujte si je.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

G2 Z předešlých odvoďte následující limity. V mých poznámkách $\log x := \ln x$, (logaritmus uvažujeme o základu e, pokud není vysloveně uvedeno jinak).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\ a>0,\ a\neq 1.$$

G3 Spočítejte následující limity. Využijte přitom základních limit pro funkce $\sin, \cos, \exp, \log$.

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x},\quad b)\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\operatorname{tg} x)^2}{x^2},\quad c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3},\quad d)\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\cos x)^2}{x^2},$$

$$e)\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\cos x)^2}{x},\quad f)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x},\quad g)\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{e^x-1},\quad h)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{x+1}}{x},$$

$$i)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2},\quad j)\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-2x+\sin^2 x}{x},\quad k)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{x}.$$

G4 Za využití věty o limitě složené funkce (a základních limit) spočtěte následující limity. Ověřte náležitě předpoklady věty.

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{2x-6},\quad b)\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x},\quad c)\lim_{x\to 1}\frac{\sin(5x^2-5)}{x-1},\quad d)\lim_{x\to -2}\frac{\log(2+\frac{x}{2})}{x+2},$$

$$e)\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2},\quad f)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}.$$

G5 Exponenciální limity.

$$a)\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}},\quad b)\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cotg} x},\quad c)\lim_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{x}},\quad d)\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}},\quad e)\lim_{x\to -1^-}(2^x+3^x)^{\log(1+x)}.$$

G6 Těžký příklad.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}$$

G7 Protipříklad na větu o limitě složené funkce. Uvědomte si, že $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. (proč?)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\sin\frac{1}{x})-1}{x\sin\frac{1}{x}}$$

Proč tato limita neexistuje?

Výsledky

G3 a)1, b)4, c)$\frac{-1}{2}$, d)∞, e)neexistuje, f)0, g)1, h)$\frac{1}{2}$, i)0, j)-1, k)-1.
G4 a)$\frac{1}{2}$, b)3, c)10, d)$\frac{1}{2}$, e)$\frac{-1}{2}$, f)$\frac{3}{7}$.
G5 a)$e^{-1/2}$, b)e, c)∞, d)e, e)∞.
G6 $e^{-2/\pi}$.
G7 Funkce není definovaná na žádném prstencovém okolí nuly. (V každém okolí nuly se vyskytuje nějaký z bodů $x_n=\frac{1}{n\pi}$ (dokonce nekonečno takových). V bodech x_n ale není funkce definována.)