8. cvičení ze ZMA

Matěj Novotný

11.11.2015

Úlohy na cvičení

G1 Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity.

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x},\quad b)\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3},\quad c)\lim_{x\to\infty}\frac{\log^2 x}{x},\quad d)\lim_{x\to 0^+}x\log x,\quad e)\lim_{x\to-\infty}e^x(x^2+3)$$

$$f)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\operatorname{arctg} x^2},\quad g)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x-1}+\cos(2x)}{\cos^2 x},\quad h)\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arccotg}(2x+1)-\pi}{\sin\frac{1}{x}}.$$

G2 Spočtěte následující limity.

$$a)\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)},\quad b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/(e^x-\cos x)},\quad c)\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(\sin(x+\pi))^{\operatorname{tg} x},\quad d)\lim_{x\to\infty}(\log x)^{e^{-x}},\quad e)\lim_{x\to\infty}(x^2+2)^{1/\log x}$$

G3 Spočtěte následující limity. Pokud používáte nějakou větu, nezapomeňte ověřit předpoklady.

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^3-27)}{x-3},\quad b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}},\quad c)\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\operatorname{cotg} x},\quad d)\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

$$e)\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{x},\quad f)\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{x-4}},\quad g)\lim_{x\to\infty}\frac{4^{x+1}}{3^x x},\quad h)\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\log x,\quad i)\lim_{y\to\infty}\frac{e^y-\log y}{y^2}.$$

G4 Counterexample. Na následujícím přikladu si všimněte, že předpoklad existence limity $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ je v l'Hospitalově pravidle nezbytný.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

Výsledky

G1 a)7, b)∞, c)0, d)0, e)0, f)1, g)$\frac{3}{2}$, h)$-\frac{1}{2}$.

G2 a)e, b)e^2, c)1, d)1, e)e^2.

G3 a)27, b)0, c)e^2, d)neexistuje, e)∞, f)$\sqrt[4]{e}$, g)∞, h)0, i)∞.

G4 Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0,$$

ale

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

což však neexistuje.