4. cvičení z PMS

Matěj Novotný

25.10.2016

.

G1 Náhodná veličina X má distribuční funkci F_X rovnou

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u < -1, \\ \frac{1}{3} & u \in [-1, 2) \\ \frac{5}{6} & u \in [2, 7) \\ 1 & u \geq 7. \end{cases}$$

Najděte pravděpodobnostní funkci p_X, určete $\mathbb{E}X$ a $\operatorname{var} X$.

G2

a) Nalezněte rozptyl výsledku hodu kostkou.

b) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu padlých pan po deseti nezávislých hodech mincí.

c) Pokud v bodě *b*) dostanu za každou padlou pannu 10$, jaká je průměrná hodnota výhry a jaký je její rozptyl?

G3 Alice a Bob hází kamenem na okno. Alice jej trefí s pravděpodobností $p_1 = 0.05$, Bob s pravděpodobností $p_2 = 0.08$, vzájemně nezávisle. Začíná Alice a střídají se.

a) Jaký je průměrný počet hodů kamenem, než se okno rozbije?

b) V kterém kole hra průměrně skončí?

c) Jaký je rozptyl počtu kol?

Řešení G3 a) Nechť Z je náhodná veličina označující hod, ve kterém se okno rozbíjí. Její pravděpodobnostní funkce je rovna

$$p_X(k) = \begin{cases} \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{\frac{k-1}{2}} p_1 & k \text{ je liché} \\ (1-p_1)^{\frac{k}{2}}(1-p_2)^{\frac{k}{2}-1} p_2 & k \text{ je sudé} \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Potom střední hodnotu Z spočteme jako

$$\mathbb{E}Z = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_Z(k) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^{\frac{2k+1-1}{2}} p_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(2k)(1-p_1)^{\frac{2k}{2}}(1-p_2)^{\frac{2k}{2}-1}p_2 =$$

$$= 2p_1 \sum_{k=0}^{\infty} k\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^k + p_1 \sum_{k=0}^{\infty} \big((1-p_1)(1-p_2)\big)^k + \frac{2p_2}{1-p_2}\sum_{k=1}^{\infty} k\big((1-p_1)(1-p_2)\big)^k.$$

Označme si pro jednoduchost $t = (1-p_1)(1-p_2) = \frac{874}{1000}$. Potom máme

$$\mathbb{E}Z = \left(2p_1 + \frac{2p_2}{1-p_2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} kt^k + p_1 \sum_{k=0} t^k = \left(2p_1 + \frac{2p_2}{1-p_2}\right) t \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right)' + \frac{p_1}{1-t} =$$

$$= \left(2p_1 + \frac{2p_2}{1-p_2}\right) t \left(\frac{1}{1-t}\right)' + \frac{p_1}{1-t} = \left(2p_1 + \frac{2p_2}{1-p_2}\right) \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{p_1}{1-t},$$

což je po vyčíslení rovno

$$\mathbb{E}Z = 15.2\overline{7}.$$

b) Označme p pravděpodobnost, že během se jednoho kola okno rozbije. Platí $p = p_1 + (1-p_1)p_2 = 0.126$. Potom pokud Y je pořadí kola, ve kterém se okno rozbije, máme $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$. Tedy $\mathbb{E}Y = \frac{1}{p} = 7.9365$.

c) Potřebujeme najít rozptyl geometrického rozdělení. Pokud $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$, je druhý moment roven

$$\mathbb{E}Y^2 = \sum_{a\in\mathbb{N}} a^2 \cdot p_Y(a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1}p - \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p =$$

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right)' - p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(1-p)^k\right)' = p\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right)' + p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k+1}\right)'' =$$

$$= p \cdot \frac{-1}{p^2} + p\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1-p)^k\right)'' = \frac{-1}{p} + p\left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1 - (1-p)\right)'' = \frac{2-p}{p^2}.$$

Celkem tedy $\operatorname{var} Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = 55.0517$. Hoden zapamatování je vztah

$$Y \sim \mathrm{Geom}(p) \Rightarrow \operatorname{var} Y = \frac{1-p}{p^2}.$$