Zápočtový test z PMS

Pro úspěšné napsání je třeba získat alespoň 15b

13.12.2016

.

T1 Výrobek má parametry váha a výška, ve kterých by měl odpovídat standardům. Pravděpodobnost, že jeho váha není standardní je 0.05, u výšky je tato pravděpodobnost rovna 0.04. Jestliže víme, že jeho váha není v pořádku, potom pravděpodobnost, že jeho výška není v pořádku je 0.7.

a) Jaká je pravděpodobnost, že výrobek není standardní, tj. jeho váha nebo výška neodpovídají standardům? *(3 body)*

b) Pokud víme, že výška je v pořádku, jaká je pravděpodobnost, že váha je mimo standard? *(4 body)*

c) Podrobně dokažte, zda jevy "výrobek má standardní váhu" a "výrobek má standardní výšku" jsou nezávislé. *(3 body)*

Udržujte matematický zápis, pouhé násobení/sčítání čísel jako odůvodnění či postup nestačí.

T2 Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení určené sdruženou hustotou

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{x^3y^3} & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

a) Určete konstantu c. *(3 body)*

b) Určete marginální hustoty f_X, f_Y. Jsou X a Y nezávislé? Dokažte. *(4 body)*

c) Určete $\mathbb{E}X$ a $\operatorname{var} X$. *(4 body)*

T3 Studenti hodnotí vyučující v anketě známkou $1-5$. Průměrná známka profesora Nováka je 1.74, rozptyl jeho hodnocení je roven 1.44. Tento semestr jej ohodnotilo 100 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že jeho průměrné hodnocení za tento semestr bude horší než 1.8? Uveďte za jakých předpokladů mají vaše odhady smysl. *(9 bodů)*

Bonus *(+4 body)* Než si p. Novák přečetl výsledky ankety, vsadil se s kolegou, že pokud bude jeho průměrné hodnocení za tento semestr horší než 1.8, koupí kolegovi láhev vína v ceně 100Kč. Pokud ale jeho průměrné hodnocení v tomto semestru bude lepší než 1.5, kolega mu koupí láhev kubánského rumu za 800Kč. Přepočteno na peníze, pro koho je sázka výhodnější?

Řešení

T1 a) Označme po řadě m, resp. h jevy, že výrobek nemá standardní váhu, resp. výšku. Potom z definice podmíněné pravděpodobnosti

$$\mathbf{P}(m \cap h) = \mathbf{P}(h|m) \cdot \mathbf{P}(m) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

a podle věty o inkluzi a exkluzi

$$\mathbf{P}(m \cup h) = \mathbf{P}(m) + \mathbf{P}(h) - \mathbf{P}(m \cap h) = 0.05 + 0.04 - 0.035 = 0.055.$$

b) Nechť $\overline{A}$ značí doplněk jevu A. Potom chceme zjistit $\mathbf{P}(m|\overline{h})$. Platí

$$\mathbf{P}(m|\overline{h}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{m}|\overline{h}) = 1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{m} \cap \overline{h})}{1 - \mathbf{P}(h)} = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}(m \cup h)}{1 - \mathbf{P}(h)} = 1 - \frac{0.945}{0.96} = 0.015625.$$

c) Máme $\mathbf{P}(m) \cdot \mathbf{P}(h) = 0.002 \neq 0.035 = \mathbf{P}(m \cap h)$, tedy jevy m a h jsou závislé. Jelikož jevy $\overline{m}$ a $\overline{h}$ jsou nezávislé právě tehdy, jsou-li m a h nezávislé, platí, že $\overline{m}$ a $\overline{h}$ jsou závislé.

G2 Konstantu c určíme z rovnice

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{c}{x^3 y^3} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = c \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \ \mathrm{d}x \right)^2 = c \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{c}{4},$$

tedy $c = 4$.

b) Marginální hustotu X dostaneme vyintegrováním sdružené hustoty podle y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}y = \begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{4}{x^3 y^3} \mathrm{d}y = \frac{4}{x^3} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^3} \mathrm{d}y = \frac{2}{x^3} & x \geq 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases}$$

Protože je $f_{X,Y}$ v obou proměnných symetrická, je $f_X(u) = f_Y(u)$ pro skoro všechna $u \in \mathbb{R}$. Pro skoro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ platí $f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$, proto jsou X a Y nezávislé.

c) Po řadě

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^3} \mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{x} \right]_1^{\infty} = 2,$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2x^2}{x^3} \mathrm{d}x = \left[2 \ln x \right]_1^{\infty} = \infty,$$

a tedy $\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \infty - 4 = \infty$.

T3 Máme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$ s vlastnostmi $\mathbb{E}X_i = 1.74$ a $\operatorname{var} X_i = 1.44$, $i \in \{1, ..., 100\}$. Chceme zjistit pravděpodobnost $\mathbf{P}(\overline{X} > 1.8)$. Předpokládáme-li, že jsou veličiny $X_1, ..., X_{100}$ nezávislé, potom podle CLV (100 je dostatečný počet veličin s přihlédnutím k tomu, že $X_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pro každé $i \in \{1, ..., 100\}$) má veličina

$$Z = \frac{\overline{X} - 1.74}{\sqrt{1.44}} \sqrt{100}$$

téměř normované normální rozdělení. Tedy

$$\mathbf{P}(\overline{X} > 1.8) = \mathbf{P}\left(Z > \frac{1.8 - 1.74}{\sqrt{1.44}} \sqrt{100} \right) = \mathbf{P}\left(Z > \frac{0.6}{1.2} \right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{1}{2} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2} \right) = 0.309.$$

Bonus Chceme nejprve zjistit pravděpodobnost $\mathbf{P}(\overline{X} < 1.5)$. Za použití stejného značení a předpokladů jako v úloze **T3** máme

$$\mathbf{P}(\overline{X} < 1.5) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{1.5 - 1.74}{\sqrt{1.44}} \sqrt{100} \right) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{-2.4}{1.2} \right) = 1 - \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 0.023.$$

Nyní můžeme vytvořit veličinu výdělku (přepočítáno na peníze) profesora Nováka ze sázky. Máme $\Omega = \{\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1\}$ pravděpodobnostní prostor, kde jevy $\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1$ po řadě reprezentují skutečnosti, že průměr jeho hodnocení za tento semestr bude horší než 1.8, mezi 1.8 a 1.5 a lepší než 1.5. Dle předchozích výpočtů máme $\mathbf{P}(\omega_{-1}) = 0.309$ a $\mathbf{P}(\omega_1) = 0.023$. Veličinu výdělku definujeme předpisem

$$X(\omega_{-1}) = -100, X(\omega_0) = 0, X(\omega_1) = 800.$$

Počítáme

$$\mathbb{E}X = -100 \cdot 0.309 + 0 + 800 \cdot 0.023 = -12.5.$$

Proto je sázka pro profesora Nováka nevýhodná, tj. výhodnější je sázka pro jeho kolegu.