7. cvičení z PST

Matěj Novotný

16.4.2018

.

G1 Pravděpodobnosti hodnot náhodného vektoru (X, Y) jsou určeny tabulkou

X \ Y	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.1	0.1

Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y, střední hodnotu $\mathbb{E}(X, Y)$ a kovariant. Jsou X a Y nezávislé? Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Z = X + Y$.

G2 Sdružená hustota náhodného vektoru (X, Y) je rovna

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete marginální rozdělení, rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a napište korelační matici.

G3 Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Nalezněte marginální rozdělení, rozhodněte o nezávislosti X a Y a spočtěte $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$.

G4 Nalezněte náhodné veličiny X a Y, pro něž platí $\text{cov}(X, Y) = 0$, avšak X a Y nejsou nezávislé.

G5 Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, pro které platí $X \sim \text{Alt}(0.3)$ $Y \sim \text{Alt}(0.5)$. Nechť je jejich korelační koeficient roven $\rho = 21^{-1/2}$. Určete $\mathbb{E}XY$ a $\mathbb{E}(X^2 + Y^2)$.

G6 Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na kruhu v $\mathbb{R}^2$ o poloměru 3 se středem v počátku. Zobrazíme jej funkcí $h(x, y) = x^2 + y^2$. Popište rozdělení veličiny $Z = h(X, Y)$ a najděte její střední hodnotu.

Řešení

G1 Vyřešíme zde pouze poslední část, tedy rozdělení veličiny $Z = X + Y$. Letmým pohledem na hodnoty X a Y zjistíme, že součet $X+Y$ nabývá hodnot $2, 3, 4, 5$. Sečtením odpovídajících pravděpodobností dostáváme tabulku rozdělení Z

Z	2	3	4	5
p_Z	0.1	0.4	0.4	0.1

G2 Integrací $f_{X,Y}$ podle y dostaneme hustotu f_X veličiny X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}}\ \mathrm{d}y = e^{-x}\left[-\frac{2}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right]_0^{\infty} = e^{-x} & x > 0\,, \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

A obdobně získáme hustotu veličiny Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0\,, \\ 0 & y \leq 0\,. \end{cases}$$

Dvě spojitě rozdělené náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, pokud

$$f_X \cdot f_Y \overset{\text{a.e.}}{=} f_{X,Y}\,,$$

kde a.e. značí rovnost skoro všude (almost everywhere), tj. všude až na množinu nulové míry (To jsou například "méněnedimenzionální"množiny - pracujeme v $\mathbb{R}^2$, tedy to budou různé křivky, množiny spočetně mnoha bodů apod.) . Vynásobíme-li funkce f_X, f_Y, dostaneme

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} \cdot \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{jinak}\,, \end{cases}$$

což je přesně rovno sdružené hustotě $f_{X,Y}$ v bodech (x, y). Lze tedy konstatovat, že jsou veličiny X a Y nezávislé.

Korelační matice má na diagonále samé jedničky (neboť $\rho_{X,X} = 1$ pro každou veličinu X s nenulovým konečným rozptylem) a protože jsou veličiny X, Y nezávislé, je $\rho_{X,Y} = 0$, tedy dostáváme

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

G3 Označíme-li jednotkový kruh U, potom hustota rovnoměrného rozdělení na U je konstantní na U a nulová mimo U. Rychlým výpočtem zjistíme, že

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & (x,y) \in U \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Opět integrací sdružené hustoty podle y resp. x získáme marginální hustoty veličin X resp. Y. Jelikož X nabývá hodnoty pouze v intervalu $(-1, 1)$, je zřejmé, že $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \notin (-1, 1)$. Pokud $x \in (-1, 1)$, potom

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\ \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Zcela zřejmě ze symetrie X a Y plyne, že $f_Y(y) = f_X(y)$. Máme tedy

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & x \in (-1,1)\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Ověřme zda jsou X a Y nezávislé. Součin f_X a f_Y je pro skoro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ roven

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} & (x,y) \in (-1,1)^2\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Je tedy zřejmé, že součin marginálních hustot není roven sdružené hustotě na množině nenulové míry (nerovnost platí skoro všude na čtverci $(-1,1)^2$). Veličiny X a Y tedy nejsou nezávislé.

Jelikož hustoty $f_X = f_Y$ jsou sudé funkce, je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$.

G4 Zvolme například $X \sim U(-1,1)$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1,1)$ a $Y = X^2$. Potom jsou X a Y zřejmě závislé (dokonce tak, že sdružená hustota ani neexistuje, nakreslete si!) avšak $\mathbb{E}X = 0$ a

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dohromady tedy máme: $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}Y = 0$.

G5 Označíme-li $\mathrm{D}\,X = \sigma_X^2$ a $\mathrm{D}\,Y = \sigma_Y^2$, máme

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\mathbb{E}XY = \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Platí $\mathbb{E}X = 0.3$, $EY = 0.5$, $\sigma_X^2 = 0.21$, $\sigma_Y^2 = 0.25$, tedy

$$\mathbb{E}XY = \frac{\sqrt{0.21 \cdot 0.25}}{\sqrt{21}} + 0.3 \cdot 0.5 = 0.2$$

Dále $\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot 0.7 + 1^2 \cdot 0.3 = 0.3$, $\mathbb{E}Y^2 = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 0.5$, tedy $\mathbb{E}(X^2+Y^2) = 0.8$.

G6 Náhodná veličina Z bude zřejmě nabývat hodnot v rozmezí $[0,9]$, její distribuční funkci tedy zkonstruujeme následovně

$$F_Z(z) = P\left(X^2+Y^2 \le z\right) = \begin{cases} 0\,, & z < 0\,, \\ P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \le \sqrt{z}\right)\,, & z \in [0,9)\,, \\ 1\,, & z \ge 9\,. \end{cases}$$

Veličina $\sqrt{X^2+Y^2}$ udává vzálenost náhodně vybraného bodu od středu kruhu. Tedy pro $z \in [0.9]$ je pravděpodobnost $P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \le \sqrt{z}\right)$ rovna poměru obsahů soustředných kruhů o poloměrech $\sqrt{z}$ a 3. To jest $\frac{\pi(\sqrt{z})^2}{\pi 3^2} = \frac{z}{9}$. Celkově dostáváme

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0\,, & z < 0\,, \\ \frac{z}{9}\,, & z \in [0,9)\,, \\ 1\,, & z \ge 9\,, \end{cases}$$

tedy veličina Z má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,9]$. Zřejmě $\mathbb{E}Z = \frac{9-0}{2} = 4.5$.