Zápočtová písemka z PST 30.4.2018

T1 Trolů je v populaci třikrát více než trpaslíků a lidí je dvakrát více než trolů. Testem inteligence projde průměrně 50% lidí, 70% trpaslíků a pouze 10% trolů. Test všichni vyplňují nezávisle. Náhodně vyberu z populace dvě postavy.

a) Jaká je pravděpodobnost, že je to trol a člověk?

b) Jaká je pravděpodobnost, že obě dvě prošly testem?

c) První postava testem prošla. Jaká je pravděpodobnost, že to byl člověk?

T2 Veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,7]$. Určete její distribuční funkci. Pokud $Y = X^2 - \mathbb{E}X$, určete $\mathbb{E}XY$ a $\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}Y$.

T3 Váhy součástek A, B v gramech mají po řadě rozdělení $\mathrm{N}(10,2)$ a $\mathrm{N}(15,9)$. V balíčku je náhodně vybraných 11 součástek A a 3 součástky B. Určete pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraná součástka A bude mít více než 10 gramů?

b) náhodně vybraná součástka B bude vážit v rozmezí $12 - 18$ gramů?

c) balíček bude vážit více než 180 gramů?

Řešení

T1 Označíme-li procentuální zastoupení trpaslíků v populaci p_1 (to jest rovno pravděpodobnosti, že když náhodně vyberu jedince z populace, bude to trpaslík), dostáváme rovnici

$$p_1 + 3p_1 + 2 \cdot 3p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 0.1.$$

a) Označme nyní jevy "první postava je trpaslík, resp. trol, resp. člověk"po řadě D, resp. T, resp. H. Jistě platí $p_1 = P(D)$. U druhé postavy jsou tyto pravděpodobnosti stejné a protože vybírám postavy nezávisle, platí

$$P(\text{vybral jsem trola a človeka}) = P(T)P(H) + P(H)P(T) = 2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 36\%.$$

b) Označíme I, resp. J jev, že první, resp. druhá postava prošla testem. Dle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(I) = P(I|D)P(D) + P(I|T)P(T) + P(I|H)P(H) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.6 = 40\%.$$

Protože $P(I) = P(J)$, díky nezávislosti výběru postav máme $P(I \cap J) = P(I)^2 = 0.16$.

c) $P(H|I) = \frac{P(I|H)P(H)}{P(I)} = \frac{0.3}{0.4} = 75\%$.

T2 Hustota daného rozdělení je rovna

$$f_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{7} & u \in [0,7]\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Distribuční funkci dostaneme integrací hustoty:

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & u < 0\,, \\ \int_0^u \frac{1}{7}\,\mathrm{d}t = \frac{u}{7} & u \in [0,7)\,, \\ 1 & u \geq 7\,. \end{cases}$$

Střední hodnotu spočítáme jako $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}\left(X(X^2 - \mathbb{E}X)\right) = \mathbb{E}X^3 - (\mathbb{E}X)^2$, což je rovno

$$\mathbb{E}X^3 = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^7 \frac{t^3}{7}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{28}\right]_0^7 = \frac{343}{4}.$$

Hodnota $\mathbb{E}X$ je samozřejmě rovna $\frac{7-0}{2} = 3.5$, což lze snadno ověřit výpočtem

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^7 \frac{t}{7}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{14}\right]_0^7 = 3.5.$$

Dostáváme $\mathbb{E}XY = \frac{343}{4} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 73.5$. Zbývá spočítat $\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}Y = \mathbb{E}X = 3.5$.

T3 Označme A, resp. B hmotnost v gramech náhodně vybrané součástky A, resp. B. Potom je $A \sim \mathrm{N}(10, 2)$ a $B \sim \mathrm{N}(15, 9)$. Pro a) tedy máme $P(A > 10) = \frac{1}{2}$, pro b) dostáváme normalizací

$$P(12 \leq B \leq 18) = P\left(\frac{-3}{3} \leq \frac{B-15}{3} \leq \frac{3}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 0.68.$$

Označme nyní $A_1, ..., A_{11}$, resp. B_1, B_2, B_3 hmotnosti v gramech náhodně vybraných součástek A, resp. B do balíčku a X jako hmotnost balíčku v gramech. Potom je

$$X = \sum_{i=1}^{11} A_i + \sum_{i=1}^{3} B_i.$$

Budeme-li předpokládat, že hmotnosti součástek A a B jsou nezávislé, potom má náhodná veličina X normální rozdělení s parametry

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{11} \mathbb{E}A_i + \mathbb{E}B_1 + \mathbb{E}B_2 + \mathbb{E}B_3 = 11 \cdot 10 + 3 \cdot 15 = 155$$

a

$$\mathrm{D}\,X = \sum_{i=1}^{11} \mathrm{D}\,A_i + \mathrm{D}\,B_1 + \mathrm{D}\,B_2 + \mathrm{D}\,B_3 = 11 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 49.$$

V řešení c) využijeme normalizace veličiny X:

$$P(X > 180) = P\left(\frac{X-155}{7} > \frac{180-155}{7}\right) = 1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{25}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{25}{7}\right) \doteq 0.$$

Vidíme, že pokud jsou hmotnosti součástek nezávislé, pak je pravděpodobnost, že hmotnost balíčku přesáhne 180 gramů, takřka nulová.