Zápočtová písemka z PST 30.4.2018

T1 Náhodně vyberu číslo z množiny $\{1, 2, ..., 700\}$.

a) Jaká je pravděpodobnost, že je číslo dělitelné sedmi?

b) Nechť je vybrané číslo dělitelné sedmi. Jaká je pravděpodobnost, že je dělitelné pěti?

c) Nechť je dané číslo dělitelné dvěma. Jaká je pravděpodobnost, že není dělitelné pěti ani sedmi?

T2 Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení dané hustotou

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, \infty)\,, \\ 0\,, & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Určete marginální rozdělení veličin X, Y, pravděpodobnost jevů $X > \frac{1}{4}$ a $Y < \ln 7$ a hodnotu $\mathrm{cov}(X, Y)$.

T3 V jisté firmě přichází lidé do práce rovnoměrně mezi 8:45 a 9:10. Určete pravděpodobnost, že z 200 lidí přišla dnes většina do práce včas, tj. do 9:00 a proveďte diskuzi nad předpoklady, které používáte.

Řešení

T1 Vyberme náhodně číslo z množiny $\{1, ..., 700\}$ a označme D_i jako jev, že je toto číslo dělitelné číslem $i \in \mathbb{N}$.

a) Neboť je 700 dělitelné sedmi, máme $P(D_7) = \frac{1}{7}$.

b) Číslo 700 je dělitelné i pěti, proto jsou jevy D_5 a D_7 nezávislé a máme $P(D_5|D_7) = P(D_5) = \frac{1}{5}$.

c) Opět 700 je dělitelné dvěma, proto jsou všechny jevy D_2, D_5, D_7 nezávislé a snadno bychom dokázali i nezávislost jevů D_2 a $\overline{D_5 \cup D_7}$. Máme tedy

$$P(\overline{D_5 \cup D_7}|D_2) = P(\overline{D_5 \cup D_7}) = 1 - P(D_5 \cup D_7),$$

avšak

$$P(D_5 \cup D_7) = P(D_5) + P(D_7) - P(D_5 \cap D_7) = P(D_5) + P(D_7) - P(D_5)P(D_7) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{35} = \frac{11}{35},$$

což celkově dává $P(\overline{D_5 \cup D_7}|D_2) = 1 - \frac{11}{35} = \frac{24}{35}$.

T2 Letmým pohledem nebo postupnou integrací sdružené hustoty podle jednotlivých proměnných získáme marginální hustoty veličin X a Y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ \mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-y}\ \mathrm{d}y = 1 & x \in [0, 1]\,, \\ 0 & \text{jinak}\,, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{1} e^{-y}\ \mathrm{d}x = e^{-y} & y \in [0, \infty)\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Pomocí marginálních hustot počítáme zadané pravděpodobnosti

$$P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1\ \mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$

$$P(Y < \ln 7) = \int_{-\infty}^{\ln 7} f_Y(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\ln 7} e^{-y}\ \mathrm{d}y = \left[-e^{-y}\right]_0^{\ln 7} = \frac{6}{7}.$$

Vidíme, že součin marginálních hustot je roven sdružené hustotě (ověřte si!), z čehož vyplývá, že jsou veličiny X a Y nezávislé. Z toho plyne, že $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

T3 Označme X_i, $i \in \{1, ..., 200\}$ veličinu udávající, zda i-tý zaměstnanec přišel dnes do práce včas. Snadno to můžeme reprezentovat hodnotami 1 (včas) a 0 (pozdě). Vzhledem k tomu, že příchod každého ze zaměstnanců se řídí rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 25)$, lze z toho vyčíst pravděpodobnost, že i-tý zaměstnanec příjde do práce včas, tj. do 9:00:

$$P(X_i = 1) = \int_0^{15} \frac{1}{25}\,\mathrm{d}t = 0.6.$$

Proto je $\mathbb{E}X_i = 0.6$ a $\mathrm{var}\,X_i = 0.6 - (0.6)^2 = 0.24$. Pro aplikaci CLV je třeba předpokládat, že jsou veličiny X_i, $i \in \{1, ..., 200\}$ nezávislé, tedy, že zaměstnanci chodí do práce včas/pozdě nezávisle. Dosti pravděpodobně tomu tak není, byť lze očekávat, že závislosti nebudou příliš velké a nebudou mít velký rozsah napříč skupinou (například spolu dva lidé jedou autem, přijíždí stejnou tramvají...). Použijeme tedy CLV, abychom zjistili

$$P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i \geq 101\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i - 200 \cdot 0.6}{\sqrt{200 \cdot 0.24}} \geq \frac{101 - 120}{\sqrt{48}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-19}{\sqrt{48}}\right) = \Phi(2.74) = 0.997.$$