9. cvičení

1. Uvažme množiny

$$M_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \frac{(-1)^n}{n} \leq x \leq 4n - n^2 \right\},$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Nechť $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ a $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Rozhodněte, která z následujích tvrzení platí: (i) $A \subseteq B \times B$; (ii) $B \setminus A = \emptyset$; (iii) $A \cap B \neq \emptyset$.

[Výsledek: (i) neplatí; (ii) platí; (iii) neplatí.]

2. Je dáno zobrazení $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2 + 2x$. Ukažte, že f je bijekce.

3. Kolik je binárních relací na množině M, která má n prvků?

[Výsledek: 2^{n^2}.]

4. Nechť $M = \{1, 2, 3\}$. Na množině M uvažme binární relace

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\} \quad \text{a} \quad S = \{(1, 1), (2, 3)\}.$$

   (a) Nalezněte R^{-1} a S^{-1}.

   [Výsledek: $R^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (2, 3)\}$ a $S^{-1} = \{(1, 1), (3, 2)\}$]

   (b) Nalezněte $R \circ S$ a $S \circ R$.

   [Výsledek: $R \circ S = \{(1, 1), (3, 3)\}$ a $S \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$.]

5. Na $\mathbb{R}$ uvažte relace $R = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ a $S = \{(x, x + 1) | x \in \mathbb{R}\}$. Určete relace R^{-1}, S^{-1}, $R \circ S$ a $S \circ R$.

[Výsledek: $R^{-1} = \{(x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$; $S^{-1} = \{(x + 1, x) | x \in \mathbb{R}\}$; $R \circ S = \{(x, x^2 + 1) | x \in \mathbb{R}\}$; $S \circ R = \{(x, (x + 1)^2) | x \in \mathbb{R}\}$.]

6. Nechť $M = \{a, b, c\}$. Ověřte, zda binární relace

$$R = \{(a, a), (b, c), (c, a), (c, c)\}$$

na M je

   (a) reflexivní;

   [Výsledek: ne.]

   (b) symetrická;

   [Výsledek: ne.]

   (c) antisymetrická;

   [Výsledek: ano.]

   (d) tranzitivní.

   [Výsledek: ne.]