Relace

1. Nechť $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $R \subseteq M \times M$ je relace definovaná následovně:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4)\}.$$

   (a) Rozhodněte, zda je relace R antisymetrická.

   (b) V případě, že R není antisymetrická, uberte z R jeden prvek tak, aby se stala antisymetrickou. Pokud je naopak R antisymetrická, přidejte k R jeden prvek tak, aby nebyla antisymetrická.

2. Nalezněte všechny relace na množině $\{0, 1\}$, které jsou současně symetrické a antisymetrické.

3. Kolik je symetrických relací na množině $M = \{1, \ldots, n\}$?

4. Na množině $\mathbb{R}$ reálných čísel uvažujte relaci R definovanou následovně:

$$xRy, \text{ jestliže existuje celé číslo } n \text{ takové, že } x^2 + y^2 = n^2.$$

   (a) Jaké z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace R?

   (b) Nalezněte R^{-1}.

5. Na množině všech n-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ uvažujte relaci R definovanou následovně:

$$ARB, \text{ jestliže } A \cap B \neq \emptyset.$$

   (a) Jaké z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace R?

   (b) Nechť A je pevně daná n-prvková množina. Určete, kolik množin B splňuje $A(R \circ R)B$.

6. Na množině $\mathbb{N}$ přirozených čísel uvažujte relaci R definovanou předpisem

$$mRn, \text{ jestliže } m \log n \leq n \log m.$$

   (a) Ukažte, že R je reflexivní, ale nikoliv antisymetrická.

   (b) Rozhodněte, zda platí $R \circ R = R$?

7. Na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je dána relace R tak, že $(m, n) \in R$, jestliže platí implikace $(m \neq n) \Rightarrow (m^n < n^m)$.

   (a) Rozhodněte, zda R je reflexivní a symetrická.

   (b) Ukažte, že R je tranzitivní.

8. Na množině $\mathbb{R}^2$ uvažte relaci R definovanou následovně:

$$(x, y)R(u, v), \text{ jestliže } x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

   Ověřte, že R je ekvivalence a nalezněte třídy ekvivalence.

9. Na množině všech neprázdných podmnožin množiny M uvažujte relaci R definovanou tak, že $(A, B) \in R$, jestliže existuje $C \subseteq M$ tak, že $A \cap C \neq \emptyset$ a $B \cap C \neq \emptyset$.
   (a) Ukažte, že R je ekvivalence a určete počet tříd ekvivalence.
   (b) Je také $R \circ R$ ekvivalence?
10. Nechť $M = \{a, b\}$. Nalezněte maximální a minimální prvky potenční množiny $\mathcal{P}(M)$ s uspořádáním daným inkluzí.
11. V rovině $\mathbb{R}^2$ máme relaci R definovanou tak, že bod (x_1, y_1) je v relaci (x_2, y_2), jestliže žádná souřadnice prvního bodu nepřevýší žádnou souřadnici druhého bodu.
   (a) Je relace R uspořádání v rovině?
   (b) Které všechny body (x, y) splňují $(0, 0)R \circ R^{-1}(x, y)$?
12. V rovině $\mathbb{R}^2$ máme relaci Q definovanou tak, že $(x_1, y_1)Q(x_2, y_2)$, jestliže $x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$.
   (a) Ukažte, že Q není uspořádání v $\mathbb{R}^2$.
   (b) Nalezněte nějakou nekonečnou podmnožinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$, na které by Q bylo uspořádání.
13. Na množině $\mathbb{Z}$ celých čísel je definovaná relace R tak, že $(m, n) \in R$, jestliže existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $n = m^p$.
   (a) Ukažte, že R je uspořádání.
   (b) Nalezněte všechny maximální prvky množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ vzhledem k uspořádání $R \cap (M \times M)$.
14. Na množině všech podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je dána relace R tak, že ARB, jestliže $A \cup B$ je vlastní podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a) Jaké z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace R?
   (b) Je relace $R \circ R$ tranzitivní?
15. Na množině $\mathbb{N}$ uvažte relaci R definovanou tak, že mRn, jestliže největší prvočíselný dělitel čísla m je stejný jako nejmenší prvočíselný dělitel čísla n.
   (a) Ověřte, že R není symetrická.
   (b) Nalezněte nějakou nekonečnou podmnožinu $M \subseteq \mathbb{N}$ tak, aby $R \cap M^2$ byla symetrická.
16. Na množině $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ uvažte relaci R definovanou následovně:

$$mRn, \text{ jestliže } 9^m - 9^n \text{ je dělitelné } 4.$$

Ověřte, že R je ekvivalence. Matematickou indukcí ukažte, že $9^k - 1$ je dělitelné 4 pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Z tohoto výsledku odvoďte, kolik prvků má množina všech tříd ekvivalence R.

17. Na $\mathbb{R}^2$ uvažte lexikografické uspořádání $\preceq$. Tedy $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, jestliže platí právě jedna z následujících dvou podmínek: (i) $x_1 < x_2$, (ii) $x_1 = x_2$ a $y_1 \leq y_2$.

    (a) Ukažte, že $\preceq$ je uspořádání na $\mathbb{R}^2$ splňující, že pro každé dva prvky $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ je $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ nebo $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.

    (b) Nalezněte všechny $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňující $(0, 0) \preceq (x, y)$.

18. Platí, že složení dvou symetrických relací je nutně symetrická relace?

19. Ukažte, že R^{-1} je uspořádání, kdykoli R je uspořádání.

Výsledky

1. (a) R je antisymetrická; (b) např. $R \cup \{(2,1)\}$ není antisymetrická.
2. $\emptyset, \{(0,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0),(1,1)\}$.
3. $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.
4. (a) Relace je pouze symetrická; (b) $R^{-1} = R$.
5. (a) Pro $n = 1$ má všechny uvedené vlastnosti a pro $n > 1$ je reflexivní a symetrická, ale není antisymetrická a tranzitivní; (b) 1 pro $n = 1$ a $\binom{2n}{n}$ pro $n > 1$.
6. (b) platí.
7. (a) Je reflexivní, ale nikoli symetrická.
8. Třídy ekvivalence jsou: bod $(0,0)$ a soustředné kružnice se středem v počátku.
9. (a) Počet tříd ekvivalence je roven 1; (b) ano.
10. $\emptyset$ je minimální prvek (dokonce nejmenší prvek); $\{a,b\}$ je maximální prvek (dokonce největší prvek).
11. (a) R není uspořádání; (b) Každá dvojice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.]
12. (b) Například přímka o rovnici $y = x$.
13. (b) $1, 3, 4$.
14. (a) Pro $n = 1$ je symetrická, antisymetrická, tranzitivní a není reflexivní. Pro $n \geq 2$ je relace symetrická a není reflexivní, antisymetrická a tranzitivní; (b) Ano.
15. (b) Množina M může být např. množina všech prvočísel nebo množina $\{2^k | k \in \mathbb{N}\}$,....
16. Množina všech tříd ekvivalence relace R má jeden prvek.
17. (b) $\{(x,y) | x > 0, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) | y \geq 0\}$.
18. Ne (např. $R = \{(1,2),(2,1)\}$ a $S = \{(1,1)\}$ jsou symetrické relace na množině $M = \{1,2\}$, ale $R \circ S = \{(1,2)\}$ není symetrická).