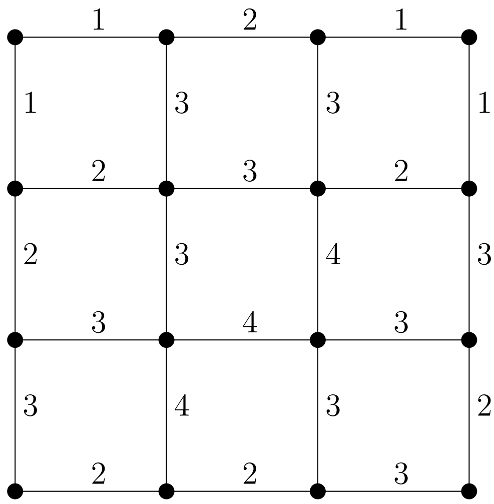
Grafy

1. Nechť G^c označuje doplněk ke grafu G. Ukažte, že alespoň jeden z dvojice grafů G a G^c je vždy souvislý.

2. Ukažte, že souvislý graf s n vrcholy je strom právě tehdy, když součet stupňů všech vrcholů je $2(n-1)$.

3. V následujícím ohodnoceném grafu nalezněte minimální kostru a určete její váhu.



4. Předpokládejme, že jednoduchý graf G má k komponent souvislosti a tyto komponenty mají $n_1, \ldots, n_k$ vrcholů. Ukažte, že počet hran grafu G nepřesahuje $\sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2}$.

5. Nakreslete, pokud je to možné, jednoduché grafy s 5 vrcholy takové, že (i) stupně všech vrcholů jsou rovny 4; (ii) stupně všech vrcholů jsou rovny 3.

6. Dokažte, že když v grafu G je možné každé dva vrcholy spojit pouze jedinou cestou, tak G je strom.

7. Uvažte jednoduchý graf se 7 vrcholy, který má 3 komponenty souvislosti. Zjistěte, jaký je maximální počet hran.

8. Nechť G je graf s n vrcholy a k komponentami souvislosti. Předpokládejte, že každá komponenta G je strom. Kolik hran má graf G? Kolik hran má doplněk G^c ke grafu G?

9. Nakreslete příklad, pokud existuje, jednoduchého eulerovského grafu, který má

   (a) sudý počet vrcholů a lichý počet hran;

   (b) lichý počet vrcholů a sudý počet hran.

10. Kolik hran má plně binární strom s (i) 999 vrcholy; (ii) 1000 vrcholy.

11. Množina vrcholů V jednoduchého grafu G se skládá ze dvou disjunktních částí $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, tj. $V = A \cup B$ a $A \cap B = \emptyset$. Graf G má vlastnost: Má-li hrana jeden konec ve vrcholu z množiny A, pak druhý konec má ve vrcholu množiny B. Jaký je maximální počet hran grafu G?

12. Farmář (označme ho F) potřebuje převést vlka (označme ho V), kozu (označme ji K) a zelí (označme ho Z) přes řeku. Má jen malou loď, která na kterou se vejde pouze farmář a právě jeden další objekt (V, nebo K, nebo Z). Přes řeku může jet farmář opakovaně. Avšak, jestliže nechá na jednom břehu bez dozoru K a V, pak V sní K. Obdobně jestliže nechá na jednom břehu bez dozoru K a Z, pak K sní Z. Pod stavem budeme rozumět dvojici (A, B), kde A je množina objektů na prvním břehu a B je množina objektů na druhém břehu. Stav nazveme dovolený, jestliže na jednom z břehů není bez přítomnosti farmáře K společně s V nebo K společně se Z.

    (a) Nalezněte všechny dovolené stavy.

    (b) Zkonstruujte takový graf, že jeho vrcholy jsou všechny dovolené stavy a hrana mezi dvěma vrcholy je v případě, že mezi dvěma danými stavy lze přejít právě jedním převozem z jednoho břehu na druhý.

    (c) Nalezněte dvě odlišná řešení z nichž každé využije právě 7 přejezdů.

Výsledky

3. Váha minimální kostry je 30.

5. V případě (i) se jedná o úplný graf K_5. V případě (ii) takový graf neexistuje.

7. 10.

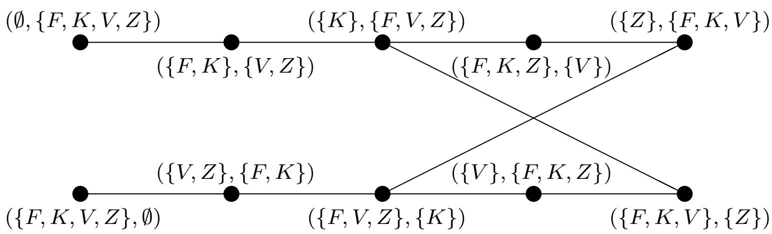
8. Počet hran grafu G je $n-k$. Počet hran grafu G^c je $\binom{n}{2}-n+k$.

9. (a) Např. souvislý graf o dvou vrcholech a jedné hraně; (b) Např. graf s vrcholy a, b a c s hranami ab a bc.

10. V případě (i) má 998 hran, v případě (ii) takový strom neexistuje.

11. $mn+\binom{m}{2}$.

12. (a) $(\{F,K,V,Z\},\emptyset)$, $(\{V,Z\},\{F,K\})$, $(\{F,V,Z\},\{K\})$, $(\{V\},\{F,K,Z\})$, $(\{F,K,V\},\{Z\})$, $(\emptyset,\{F,K,V,Z\})$, $(\{F,K\},\{V,Z\})$, $(\{K\},\{F,V,Z\})$, $(\{F,K,Z\},\{V\})$, $(\{Z\},\{F,K,V\})$.
(b)



(c)$(\{F,K,V,Z\},\emptyset)\to(\{V,Z\},\{F,K\})\to(\{F,V,Z\},\{K\})\to(\{Z\},\{F,K,V\})\to(\{F,K,Z\},\{V\})\to(\{K\},\{F,V,Z\})\to(\{F,K\},\{V,Z\})\to(\emptyset,\{F,K,V,Z\})$;

$(\{F,K,V,Z\},\emptyset)\to(\{V,Z\},\{F,K\})\to(\{F,V,Z\},\{K\})\to(\{V\},\{F,K,Z\})\to(\{F,K,V\},\{Z\})\to(\{K\},\{F,V,Z\})\to(\{F,K\},\{V,Z\})\to(\emptyset,\{F,K,V,Z\})$.