Množiny

1. Jsou dány množiny $A_n = \{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{n} + (-1)^n \leq x \leq 3 + 2n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. Nalezněte $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ a $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$, jestliže

   (a) $A_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$;

   (b) $A_n = [(-2)^n, 3^n]$.

3. Jsou dány množiny $A_n = \left(-2 - \frac{(-1)^n}{n}, 2 + (-1)^n\right)$ a $B_n = \left(5^{-n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Nalezněte množiny $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ a $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

   (b) Nalezněte bijekci mezi množinami A a B z bodu (a).

4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dána množina $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 < n^2 x^2\}$. Nalezněte $M_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ a $M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

5. Nalezněte nějakou bijekci f množiny $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$.

6. Nalezněte bijekci mezi potenční množinou přirozených čísel a potenční množinou sudých přirozených čísel.

7. Ukažte, že předpis $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1+|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, definuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na $(0, 1)$.

8. Je dána množina S všech čtverců v rovině, jejichž všechny vrcholy mají celočíselné souřadnice. Ukažte, že množina S je spočetná.

9. Ukažte, že existuje-li bijekce $f : A \to B$ množiny A na B, potom existuje bijekce množiny $A \times A$ na $B \times B$.

10. Nechť množiny A a B mají stejnou mohutnost. Ukažte, že i množiny $A \cup C$ a $B \cup C$ mají stejnou mohutnost, pokud C je disjunktní s A i B.

Výsledky

1. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [\frac{3}{2}, 5]$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, \infty)$.
2. (a) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \emptyset$; (b) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \mathbb{R}, \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \emptyset$.
3. (a) $A = (-1, 1)$ a $B = (0, 4)$; (b) např. $f : A \to B,\ f(x) = 2x + 2$.
4. (a) $M_1 = A_1$ a $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$.
5. Například $f(n) = \begin{cases} n & \text{pro } n < 0; \\ \sqrt{2} & \text{pro } n = 0; \\ n - 1 & \text{pro } n > 0. \end{cases}$
6. Například $f(A) = \{2a |\, a \in A\},\ A \subseteq \mathbb{N}$.