Zápočtová písemka z PST 29.4.2019, verze A

T1 Házíme mincí, u které je pravděpodobnost hodu panny rovna $p > 0$.

1. Jaká je pravděpodobnost, že pannu hodíme právě ve dvou ze čtyř hodů?
2. Házíme mincí, dokud nepadne panna. Jaká je pravděpodobnost, že jsme provedli více než tři hody?
3. Ze čtyř hodů padla panna alespoň jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padla právě třikrát?

T2 Náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na čtverci S s rohy $[-1, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, -1]$, $[1, 1]$. Nalezněte jeho sdruženou hustotu, určete, zda jsou X a Y nezávislé a vypočtěte $\mathbb{E}X^2Y^2$.

T3 Hodíme 100x symetrickou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že počet padlých orlů bude v rozmezí 45-55?

Řešení

T1

1. Jelikož jsou hody nezávislé, je pravděpodobnost rovna $\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$.

2. Spočítáme jako doplňkovou pravděpodobnost k jevu, že panna padla nejpozději ve třetím hodu: $1 - \big(p + (1-p)p + (1-p)^2 p\big)$

3. Označme jevy T- panna padla právě třikrát, J- panna padla alespoň jednou. Potom máme

$$P(T|J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{P(T)}{P(J)} = \frac{4p^3(1-p)}{1-(1-p)^4}.$$

T2 Plocha čtverce S je 4, proto sdružená hustota náhodného vektoru je rovna

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x,y) \in S\,, \\ 0 & (x,y) \notin S\,. \end{cases}$$

Neboť je rozdělení symetrické (sdružená hustota je symetrická dle osy $x = y$), jsou si marginální rozdělení rovny. Platí tedy

$$f_Y(x) = f_X(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} & x \in [-1,1]\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Je tedy jasné, že $f_{X,Y} = f_X f_Y$ skoro všude na $\mathbb{R}^2$, proto jsou X a Y nezávislé. Z toho důvodu je $\mathbb{E}X^2Y^2 = \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 = (\mathbb{E}X^2)^2$. Máme

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

tedy $\mathbb{E}X^2Y^2 = \frac{1}{9}$.

T3 Označme X_i veličinu, která nabývá 1, pokud v i-tém hodu padne orel a 0, pokud nepadne. Je jistě $X_i \sim \mathrm{Alt}(0.5)$, tedy $\mathbb{E}X_i = 0.5$ a $\mathrm{D}\,X_i = 0.5(1-0.5) = 0.25$ pro každé $i \in \{1, ..., 100\}$. Hody jsou nezávislé, tedy X_i také. Navíc X_i jsou symetrické kolem své střední hodnoty, lze tedy použít CLV pro $n = 100$. Máme

$$P\left(45 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 55\right) = P\left(\frac{45-50}{\sqrt{25}} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \le \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.682.$$