Zápočtová písemka z PST 29.4.2019, verze B

T1 Máme čtyři páry bot, z nichž dva jsou čisté a dva špinavé. Domácí uklizečka dobře nevidí a tak náhodně vytáhne dva páry bot, oba je vyčistí a dá zpět.

1. Ráno potom spěcháme, a tak sáhneme a náhodně vybereme jeden pár bot, které si vezmeme. Jaká je pravděpodobnost, že máme čisté boty?
2. V práci zjistíme, že máme na sobě špinavé boty. Jaká je pravděpodobnost, že uklizečka vyčistila dva páry již čistých bot?

T2 Náhodná veličina X má hustotu danou předpisem:

$$f_X(u) = \begin{cases} a\cos u & u \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Určete konstantu $a \in \mathbb{R}$, nalezněte $\mathbb{E}X$ a pravděpodobnosti $P(X < 0)$, $P(X \in [-\pi, \pi])$ a $P(X^2 > \frac{\pi^2}{9})$.

T3 Rozdělení hmotnosti (v kg) součástky A je $\mathrm{N}(5, 0.01)$, součástky B je $\mathrm{N}(10, 0.02)$. Jaká je pravděpodobnost, že balíček, kde jsou tři součástky A a tři součástky B, bude mít hmotnost v rozmezí $44.6 - 45.2$kg?

Řešení

T1 Označme po řadě jevy CC, SC a SS označující, že uklizečka vybrala k čištění po řadě dva čisté páry bot, jeden čistý a jeden špinavý a nakonec oba špinavé. Dále označme jev, že jsme si ráno vybrali čistý pár bot jako R.

1. Dle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(R) = P(R|CC)P(CC) + P(R|SC)P(SC) + P(R|SS)P(SS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\binom{4}{2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2}{\binom{4}{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{4}.$$

2. Označme $\overline{A}$ doplněk jevu A. Potom je

$$P(CC|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R}|CC)P(CC)}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\binom{4}{2}}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

T2 Hodnotu konstanty a zjistíme z rovnice

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\ \mathrm{d}u = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos u\ \mathrm{d}u = 2a,$$

tedy $a = \frac{1}{2}$. Neboť f_X je sudá funkce (tj. graf je symetrický podle osy y), je $\mathbb{E}X = 0$ a $P(X < 0) = \frac{1}{2}$. Protože X je rozdělená na intervalu $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, je $P(X \in [-\pi, \pi]) = 1$. Dále jest

$$P\left(X^2 > \frac{\pi^2}{9}\right) = P\left(X < \frac{-\pi}{3}\right) + P\left(X > \frac{\pi}{3}\right) = 2P\left(X > \frac{\pi}{3}\right) = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos u\ \mathrm{d}u = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

T3 Jestliže každá ze součástek v balíčku A_1, A_2, A_3 má rozdělení hmotnosti rovné $\mathrm{N}(5, 0.01)$ a každá ze součástek B_1, B_2, B_3 rozdělení $\mathrm{N}(10, 0.02)$, potom hmotnost veličiny $X = \sum_{i=1}^{3}(A_i + B_i)$ bude mít za předpokladu nezávislosti všech A_i a B_i rozdělení $\mathrm{N}(45, 0.09)$. Tedy veličina $U = \frac{X-45}{\sqrt{0.09}}$ bude mít rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$. Chceme vědět

$$P(44.6 \le X \le 45.2) = P\left(\frac{44.6 - 45}{\sqrt{0.09}} \le U \le \frac{45.2 - 45}{\sqrt{0.09}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{3}\right) = 0.655.$$