Zápočtová písemka z PST 29.4.2019, verze C

T1 Hodíme dvakrát šestistěnnou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

1. padlo dvakrát sudé číslo, byl-li součet hodů větší než 10?
2. byl součet hodů větší než 8, víme-li, že byl součet hodů lichý?
3. na první kostce padlo nejvýše 3, byl-li součin hodů lichý?

T2 Náhodný vektor má rozdělení dané hustotou

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{(x+y)^3} & x \geq 1, y \geq 1\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Určete konstantu $c \in \mathbb{R}$, pravděpodobnost $P(X < 2, Y > 1)$ a střední hodnotu $\mathbb{E}X$. Jsou X, Y nezávislé? Zdůvodněte.

T3 Nezávislé náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$ mají stejné rozdělení dané tabulkou ($i \in \{1, 2, ..., 100\}$):

X_i	0	1	3	7
p_{X_i}	0.3	0.2	0.2	0.3

Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet bude v rozmezí 280-310?

Řešení

T1

1. Pokud byl součet hodů vetší než 10, mohl být pouze 11 (padlo 5 a 6, resp. 6 a 5) nebo 12 (padly dvě šestky). Tedy správnému řešení odpovídá třetina možností, tj. výsledná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{3}$.

2. Součet hodů je lichý právě tehdy, pokud hodíme jedno liché a jedno sudé číslo, což je v polovině všech případů (tj. v 18 případech). Liché součty hodů větší než 8 jsou 9 (3 a 6, resp. 6 a 3 nebo 4 a 5, resp 5 a 4) a 11 (5 a 6, resp. 6 a 5), celkem tedy 6 možností. Dostáváme, že výsledná pravděpodobnost je rovna $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

3. Součin hodů je lichý právě tehdy, pokud na obou kostkách padne liché číslo, což je v jedné čtvrtině případů (v 9 případech). Počet možností, jak mohlo zároveň na první kostce padnout liché číslo menší nebo rovné 3 a na druhé kostce padnout liché, je 6. Celkově dostáváme pravděpodobnost $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

T2 Hodnotu konstanty c zjistíme integrací

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{c}{(x+y)^3}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{\infty} \frac{c}{2(y+1)^2}\ \mathrm{d}y = \frac{c}{4},$$

z čehož plyne $c = 4$. Neboť je sdružená hustota symetrická dle osy $x = y$, jsou si marginální hustoty rovny. Tedy platí

$$f_Y(x) = f_X(x) = \begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{4}{(x+y)^3}\ \mathrm{d}y = \frac{2}{(x+1)^2} & x > 1\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Je vidět, že $f_X f_Y \neq f_{X,Y}$ na množině kladné míry, proto X a Y nejsou nezávislé. Protože $P(Y \leq 1) = 0$, je $P(X < 2, Y > 1) = P(X < 2)$, čehož konkrétní hodnotu získáme integrací

$$\int_1^2 f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Zbývá spočítat $\mathbb{E}X$, což provedeme dosazením do vzorce

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2x}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x = 2\left[\log(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^{\infty} = \infty.$$

T3 Použijeme CLV. Nejprve zjistíme základní charakteristiky veličin:

$$\mathbb{E}X_i = \sum_{a\in\mathbb{R}} a p_X(a) = 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.2 + 3\cdot 0.2 + 7\cdot 0.3 = 2.9,$$

$$\mathbb{E}X_i^2 = \sum_{a\in\mathbb{R}} a^2 p_X(a) = 0^2\cdot 0.3 + 1^2\cdot 0.2 + 3^2\cdot 0.2 + 7^2\cdot 0.3 = 16.7,$$

$$\mathrm{D}\,X_i = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 = 8.29.$$

Potom už jen převedeme na normovaný tvar a dopočteme:

$$P\left(280 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 310\right) = P\left(\frac{280-290}{\sqrt{829}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 290}{\sqrt{829}} \leq \frac{310-290}{\sqrt{829}}\right) = \Phi(0.69) - (1-\Phi(0.35)) = 0.392.$$