11. cvičení

1. Na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ máme definovanou relaci R následovně: $(x,y)R(u,v)$, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $x = \alpha u$ a $y = \alpha v$.

   (a) Ověřte, že R je ekvivalence.

   (b) Nalezněte třídu ekvivalence odpovídající prvku $(1,1)$.
   [Výsledek: $[(1,1)] = \{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) | \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.]

2. Nechť $M = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a

$$R = \{(m,n) \in M^2 | \text{ existuje } k \in \mathbb{N} \text{ tak, že } n = mk\}.$$

   Rozhodněte, zda R je částečné uspořádání na M. Pokud ano, určete minimální a maximální prvky.
   [Výsledek: R je částečné uspořádání; maximální prvek neexistuje; minimální prvky jsou prvočísla.]

3. Na množině $\mathbb{N}$ mějme relaci R definovanou následovně: mRn, kdykoli

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}m\right) = 0.$$

   Které z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace R?
   [Výsledek: R je reflexivní, symetrická a tranzitivní, ale není antisymetrická.]

4. Na množině $\mathbb{Z}$ máme definovanou relaci R následovně: mRn, jestliže existuje $k \in \{0,1,\dots,9\}$ tak, že $n = m+k$. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{Z}$ splňující $3(R \circ R)n$.
   [Výsledek: $n \in \{3,4,\dots,21\}$.]

5. Na množině $\mathbb{N}_0$ celých nezáporných čísel je dána relace R tak, že $(m,n) \in R$, jestliže $m^2 + 3n = 81$.

   (a) Ukažte, že pokud $(m,n) \in R$, jsou m i n dělitelné třemi.

   (b) Je relace R tranzitivní? (Návod: určete všechny dvojice v relaci R.)
   [Výsledek: Relace není tranzitivní, protože $(9,0) \in R$ a $(0,27) \in R$, ale $(9,27) \notin R$.]